Olimpiada Matemática de los Andes

I Olimpiada Matemática de Los Andes

Examen Selectivo - Nivel 5

6 de diciembre de 2025

Indicaciones:

- La duración de la prueba es de **4 horas**.
- Cada problema tiene una puntuación de 25 puntos. Se otorgarán puntajes parciales de acuerdo a lo avanzado.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

---

1. Dado un triángulo acutángulo ABC. Los cuadrados $ABKL$ y $BCMN$ se construyen hacia afuera sobre los lados AB y BC. El punto O es el punto medio del segmento LM. Demuestre que la distancia del punto O a la recta AC es la mitad de la longitud del segmento AC.

2. ¿Existen números enteros positivos a y b tales que

$$\frac{a^3-22}{b^3+25}=\frac{2022}{2025}\ ?$$

3. Dados n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$|x_1|=1,\ |x_2|=2,\ |x_3|=4,\ \ldots,\ |x_n|=2^{n-1}.$$

Para cada subconjunto del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se halla la suma de todos sus elementos. Suponemos que la suma de los elementos del conjunto vacío es 0. Demuestre que las sumas obtenidas forman un conjunto de 2^n enteros consecutivos.

4. Demuestre que es posible pintar cada uno de los números de la lista

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots,\ 10000^3$$

de rojo o azul, de modo que la suma de todos los números rojos sea igual a la suma de todos los números azules.