

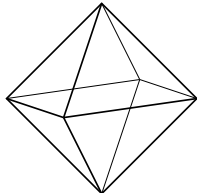
CUADRAGÉSIMO SÉPTIMO TORNEO DE LAS CIUDADES

Gira de primavera,

Nivel Mayor: Grados 10 – 11, versión avanzada, 15 de marzo de 2026.

(El resultado se resume en función de los tres problemas para los que se lograron las mejores puntuaciones.)

puntos problemas

- | | | |
|----|--|---|
| 4 | 1. Para cada cara de un octaedro regular (véase la figura), dibujamos sus tres bases medias que lo dividen en triángulos equiláteros (obteniendo así un total de 32 triángulos equiláteros pequeños). ¿Cuál es la mayor cantidad de estos triángulos que podemos colorear de manera que no tengan vértices comunes? |  |
| 5 | 2. Tenemos 200 bolas de 100 colores, dos de cada color. El presentador las ha colocado en 100 cajas, dos bolas en cada caja. El jugador desconoce qué color contiene cada caja. En su turno, el jugador puede elegir 2 cajas, tras lo cual el presentador selecciona una bola de cada caja y las intercambia sin mostrárselas al jugador. Si en algún momento cada caja contiene dos bolas de colores diferentes, el jugador gana un premio. ¿Existe alguna estrategia que le garantice al jugador el premio independientemente de cómo el presentador intercambie las bolas? | |
| 6 | 3. Los lados AB y BC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ son iguales. La circunferencia circunscrita del triángulo ABD interseca el lado BC en el punto Y , y la circunferencia circunscrita del triángulo BCD interseca el lado AB en el punto X . Demuestre que los ángulos XLA y YLC , donde L es el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$, son iguales. | |
| 9 | 4. Llamaremos <i>desafortunado</i> a un conjunto de enteros positivos consecutivos si es imposible seleccionar un factor primo para cada uno de estos números de manera que todos los factores elegidos sean distintos. ¿Es cierto que para cada k positivo, el número de conjuntos desafortunados de k enteros positivos consecutivos es finito? | |
| 10 | 5. ¿Existe un pentágono convexo con la siguiente propiedad: para cualquier punto de su perímetro, se puede hallar un cuadrado con vértice en dicho punto, inscrito en el pentágono? (Decimos que un cuadrado está inscrito en el pentágono si todos sus vértices se encuentran en el perímetro del pentágono). | |
| 10 | 6. Colocamos $2n$ torres de ajedrez en las casillas de un tablero de $2n \times 2n$ (donde n es un entero positivo). Demuestre que se pueden elegir n filas o n columnas y retirar todas las torres de dichas filas o columnas de manera que las restantes no se amenacen entre sí. | |
| 12 | 7. Alice ha seleccionado un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales. Bob puede hacerle el siguiente tipo de preguntas: le da a Alice cualquier polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y Alice le dirá <ul style="list-style-type: none">• si $P + Q$ tiene un valor máximo y, de ser así, cuál es;• si $P + Q$ tiene un valor mínimo y, de ser así, cuál es; Demuestre que Bob puede hacer un número finito de preguntas de este tipo y luego dejar de hacerlas y producir un número t tal que $ P(2026) - t < 10^{-100}$. | |