



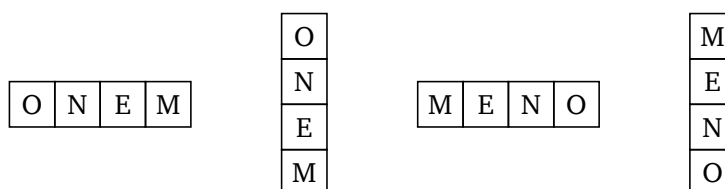
XXII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA ONEM-AA 2026

Etapla Nacional - Nivel 3

11 de octubre de 2026

1. Ana y Beto juegan en un tablero de $n \times n$, inicialmente vacío. Ana escoge k casillas y escribe una letra del conjunto $\{O, N, E, M\}$ en cada casilla escogida; puede repetir letras. Luego, Beto escribe una letra del mismo conjunto en cada casilla vacía, sin modificar las letras escritas por Ana.

Beto gana si, al completar el tablero, se puede leer la palabra ONEM en algún lugar del tablero, en cuatro casillas consecutivas de una fila o columna y en cualquiera de los dos sentidos, como se muestra en la figura. En caso contrario, gana Ana.



- a) Demuestre que, para $n = 5$ y $k = 5$, Beto puede ganar sin importar las casillas y las letras que escoja Ana.
- b) Demuestre que, para $n = 6$ y $k = 12$, Ana puede escoger las casillas y las letras de modo que gane sin importar cómo complete Beto el tablero.
2. Demuestre que, para todo entero n con $2 \leq n \leq 60$, el número $3^n - 3n$ no es un cuadrado perfecto.
3. Sea ABC un triángulo de incentro I y circunferencia circunscrita ω . Sea L un punto del arco BC de ω que no contiene a A , distinto de B y C . La recta LI corta nuevamente a ω en D . Suponga que $D \neq A$ y que la circunferencia de centro D y radio DA corta a ω en A y en otro punto X , distinto de L . Sea Y la intersección de las rectas LX y BC , y sea M el simétrico de I respecto de L . Demuestre que los puntos Y , I , A y M pertenecen a una misma circunferencia.

4. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los reales positivos. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función tal que

$$xy(x+y) \leq f(xy)f(x+y) \leq x^2f(x) + y^3,$$

para todos los números reales positivos x y y .

- a) Demuestre que $f(1) = 1$.
- b) Demuestre que $f(x) = x$, para todo real positivo x .