Solucionario del Examen de la Primera Fase - 5° de Secundaria

REALIZADO POR GRUPO MATE

1. Sea el número

$$N = \underbrace{22\ldots22}_{\text{2026 cifras}}$$

formado únicamente por 2026 cifras, todas iguales a 2. Determine el residuo que se obtiene al dividir N por 231.

A) 141 B) 134 C) 140 $\boxed{\text{D) 143}}$ E) 111

■ **Solución.** Calcularemos $N \pmod{231}$. Como $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, hallamos los residuos módulo 3, 7 y 11.

Como la suma de cifras de N es $2 \cdot 2026 = 4052$, entonces $N \equiv 4052 \equiv 2 \pmod 3$.

Como $222222 = 7 \cdot 31746 \equiv 0 \pmod 7$ y $2026 = 6 \cdot 337 + 4$, entonces $N \equiv 2222 \equiv 3 \pmod 7$.

Debido a que $22 \equiv 0 \pmod{11}$, deducimos que $N \equiv 0 \pmod{11}$.

Observamos que $N \equiv 2 \equiv -4 \pmod 3$ y $N \equiv 3 \equiv -4 \pmod 7$, por lo que $N \equiv -4 \pmod{21}$. Ahora, debido a que $N \equiv -4 - 84 \equiv -88 \pmod{21}$ y $N \equiv -88 \pmod{11}$, concluimos que $N \equiv -88 \equiv 143 \pmod{231}$. Por lo tanto, el residuo es 143. □

2. Un entero positivo n es *bueno* si existe un entero positivo k tal que la representación decimal de $k!$ termina en exactamente n ceros. Por ejemplo, $n = 1$ es bueno porque $7! = 5040$ acaba en exactamente 1 cero. Determine el menor entero positivo n que no es bueno.

Nota: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

A) 4 $\boxed{\text{B) 5}}$ C) 6 D) 7 E) 8

■ **Solución.** La cantidad de ceros al final de $n!$ es

$$v_5(n!) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \cdots.$$

Observamos que $v_5(5!) = 1$, $v_5(10!) = 2$, $v_5(15!) = 3$, $v_5(20!) = 4$ y $v_5(25!) = 6$. Además, es claro que $v_5(21!) = v_5(22!) = v_5(23!) = v_5(24!) = 4$ y como la cantidad de ceros se mantiene o crece, concluimos que no hay un n tal que $n!$ termine en exactamente 5 ceros. □

3. Determine de cuántas maneras se puede llenar el siguiente tablero si se colocan los números del 1 al 8, con el 1 y el 8 ya colocados según la figura, dejando vacía la casilla del centro, y de modo que no haya dos números consecutivos en dos casillas vecinas.

1		
	☒	
		8

Nota: Decimos que dos casillas son vecinas si comparten un lado o un vértice.

$\boxed{\text{A) 6}}$ B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

■ **Solución.** Por la simetría, sin pérdida de generalidad podemos suponer que el 3 se encuentra en alguna de las casillas que está por debajo de la diagonal principal. Una vez contadas todas las configuraciones que cumplen esta condición, el total de configuraciones válidas se obtendrá multiplicando dicho resultado por 2. Por lo tanto, hay 3 casos por evaluar:

1		
3		
		8

Caso I

1		
3		8

Caso II

1		
	3	8

Caso III

Analicemos cada uno de estos casos:

- Caso I: Observamos que 4 y 2 solo pueden estar en la última columna:

1		4
3		2
		8

1		2
3		4
		8

En consecuencia, el 5 solo puede estar en la fila inferior, lo que ocasiona que necesariamente el 6 esté en la fila superior. Como 7 no puede estar al lado de 8, solo es posible una configuración:

1	6	4
3		2
7	5	8

- Caso II: Observamos que 2 solo puede estar en la última columna:

1		
		2
3		8

1		2
3		8

La segunda de estas opciones queda descartada, pues es fácil notar que 4, 5, 6 y 7 no se pueden colocar sin que haya dos números consecutivos en casillas vecinas.
En la primera opción, notamos que en la primera columna no puede ir el 5, ya que de ser así o 4 o 6 irían en la columna central ocasionando que haya dos casillas vecinas con números consecutivos. Análogamente, notamos que en la primera columna no puede ir el 6. Además, 4 no puede ser vecino de 3, lo que implica que solo 7 puede estar en la casilla central de la primera columna. A partir de esto, se definen las demás casillas, por lo que solo es posible una configuración:

1	4	6
7		2
3	5	8

- Caso III: Observamos que 2 solo puede estar en la esquina superior derecha y 4 necesariamente está a su lado en la misma fila:

1	4	2
	3	8

Luego, el 5 solo puede estar en la esquina inferior izquierda, lo que también permite ubicar a 7 y 6, de modo que solo es posible una configuración:

1	4	2
7		6
5	3	8

En conclusión, hemos hallado solo 3 posibles configuraciones. Finalmente, hay $2 \cdot 3 = 6$ maneras de llenar el tablero cumpliendo las condiciones del problema. □

4. En una función benéfica de teatro asistieron niños, mujeres y varones. El costo de la entrada fue de S/ 13 para niños, S/ 17 para mujeres y S/ 21 para varones. Se sabe que la recaudación obtenida por la venta de entradas entre niños y mujeres fue de S/ 2 307, mientras que la recaudación entre mujeres y varones fue de S/ 2 344. Determine la recaudación total obtenida por la venta de entradas.

A) 3084 B) 3124 C) 3150 $\boxed{\text{D) 3189}}$ E) 3231

■ **Solución.** Sean n, m, v las cantidades de niños, mujeres y varones. Tenemos que:

$$13n + 17m = 2307, \qquad 17m + 21v = 2344.$$

Como $2307 = 13 \cdot 177 + 6 \equiv 6 \pmod{13}$, por lo que

$$17m \equiv 6 \pmod{13} \quad \Rightarrow \quad 4m \equiv 6 \equiv 32 \pmod{13} \quad \Rightarrow \quad m \equiv 8 \pmod{13}.$$

Por otro lado, como $2344 = 21 \cdot 111 + 13 \equiv 13 \pmod{21}$, por lo que

$$17m \equiv 13 \pmod{21} \quad \Rightarrow \quad 4m \equiv -13 \equiv 8 \pmod{21} \quad \Rightarrow \quad m \equiv 2 \pmod{21}.$$

En consecuencia, de las dos congruencias de m tenemos que $m \equiv 86 \pmod{273}$. Debido a que $17m \le 2307$, entonces $m \le 135$, lo que implica que $m = 86$. Finalmente, concluimos que

$$n = \frac{2307 - 17 \cdot 86}{13} = 65 \quad \text{y} \quad v = \frac{2344 - 17 \cdot 86}{21} = 42.$$

Finalmente, la recaudación total es

$$13 \cdot 65 + 17 \cdot 86 + 21 \cdot 42 = 845 + 1462 + 882 = 3189.$$

□

5. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abc(2b)(2b)(2c)}$ son divisibles por 63 y además sus 6 dígitos son todos diferentes de cero?

A) 1 B) 2 $\boxed{\text{C) 3}}$ D) 4 E) 5

■ **Solución.** Por el criterio del 9, la suma de dígitos $a + b + c + 2b + 2b + 2c = a + 5b + 3c$ debe ser múltiplo de 9. Por el criterio del 7, $2c + 3(2b) + 2(2b) - c - 3b - 2a = 7b + c - 2a$ debe ser múltiplo de 7. Además $a \in \{1, \ldots, 9\}$, $b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ porque a, $2b$, $2c$ deben ser dígitos no nulos.

De $7b + c - 2a \equiv 0 \pmod 7$, obtenemos que $c \equiv 2a \pmod 7$. Analicemos cada c:

- Si $c = 1$, entonces $a \equiv 4 \pmod 7$, por lo que $a = 4$.
- Si $c = 2$, entonces $a \equiv 1 \pmod 7$, por lo que $a = 1$ o 8.
- Si $c = 3$, entonces $a \equiv 5 \pmod 7$, por lo que $a = 5$.
- Si $c = 4$, entonces $a \equiv 2 \pmod 7$, por lo que $a = 2$ o 9.

Ahora evaluemos cada caso para la condición $a + 5b + 3c \equiv 0 \pmod 9$:

- Si $c = 1, a = 4$, tenemos que $4 + 5b + 3 = 7 + 5b \equiv 0 \pmod 9$, por lo que $5b \equiv 2 \pmod 9$, de donde $b = 4$ es la única opción.
- Si $c = 2, a = 1$, tenemos que $1 + 5b + 6 = 7 + 5b \equiv 0 \pmod 9$, por lo que $b = 4$.
- Si $c = 2, a = 8$, tenemos que $8 + 5b + 6 = 14 + 5b \equiv 5b + 5 \equiv 0 \pmod 9$, por lo que $5b \equiv 4 \pmod 9$, de donde $b \equiv 8 \pmod 9$, lo que es imposible.

- Si $c=3, a=5$, tenemos que $5+5b+9=14+5b\equiv 5b+5\equiv 0 \pmod 9$, por lo que $b\equiv 8 \pmod 9$, lo que es imposible.
- Si $c=4, a=2$, tenemos que $2+5b+12=14+5b\equiv 5b+5\equiv 0 \pmod 9$, por lo que $b\equiv 8 \pmod 9$, lo que es imposible.
- Si $c=4, a=9$, tenemos que $9+5b+12=21+5b\equiv 5b+3\equiv 0 \pmod 9$, por lo que $5b\equiv 6 \pmod 9$, de donde $b=3$ es la única opción.

Finalmente, hemos obtenido tres ternas (a,b,c): $(4,4,1)$, $(1,4,2)$, $(9,3,4)$, lo que implica que hay 3 números que satisfacen lo pedido. □

6. Encuentre el mayor número real x que satisface la siguiente ecuación:

$$|2-x|+|4x+1|=4.$$

Nota: $|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0\\ -x, & \text{si } x<0\end{cases}$

$\boxed{\text{A) } 1/3}$ B) 0 C) $-3/5$ D) 1 E) 2

■ **Solución.** Puntos críticos: $x=2$ y $x=-1/4$. Analizamos intervalos:

- Si $x\leq -1/4$, entonces $2-x>0$, $4x+1\leq 0$, de donde tenemos que
$$(2-x)+(-4x-1)=1-5x=4 \quad\Rightarrow\quad x=-3/5$$
que sí está en el intervalo.
- Si $-1/4<x\leq 2$, entonces $2-x\geq 0$, $4x+1>0$, por lo que tenemos que
$$(2-x)+(4x+1)=3x+3=4 \quad\Rightarrow\quad x=1/3$$
que sí está en el intervalo.
- Si $x>2$, entonces $2-x<0$, $4x+1>0$, de donde tenemos que
$$(x-2)+(4x+1)=5x-1=4 \quad\Rightarrow\quad x=1$$
que no cumple que $x>2$.

Finalmente, las soluciones son $x=-3/5$ y $x=1/3$. En conclusión, la mayor es $1/3$. □

7. Determine la suma de todos los números reales x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^4-2x^2+3=\sqrt{x^4-2x^2+5}.$$

A) 1 B) -1 C) 2 $\boxed{\text{D) } 0}$ E) -2

■ **Solución.** Hacemos $t=x^4-2x^2+3$. La ecuación es $t=\sqrt{t+2}$. Elevando al cuadrado:

$$t^2=t+2 \quad\Rightarrow\quad t^2-t-2=0 \quad\Rightarrow\quad (t-2)(t+1)=0.$$

Como $t\geq 0$, por la raíz cuadrada, tenemos $t=2$. Por lo tanto,

$$x^4-2x^2+3=2 \quad\Rightarrow\quad x^4-2x^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad (x^2-1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1.$$

Finalmente, la suma de los valores de x es $1+(-1)=0$. □

8. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 49 tal que:

$$P(n) = \frac{50!}{n} \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \ldots, 50\}.$$

Halle $P(51)$.

Nota: $50! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 50$.

A) $\frac{50!}{51}$ B) $\frac{51!}{50}$ C) $\frac{51!}{52}$ D) $\frac{50!}{52}$ $\boxed{\text{E) } 0}$

■ **Solución.** Definimos $Q(x) = xP(x) - 50!$. Por lo tanto,

$$Q(n) = n \cdot \frac{50!}{n} - 50! = 0 \text{ para } n = 1, \ldots, 50.$$

Así $Q(x)$ tiene grado 50 y tiene raíces $1, 2, \ldots, 50$. En consecuencia,

$$Q(x) = k(x-1)(x-2)\cdots(x-50).$$

Evaluando para $x = 0$, tenemos que $Q(0) = 0 \cdot P(0) - 50! = -50!$ y también se cumple que

$$Q(0) = k(-1)(-2)\cdots(-50) = k(-1)^{50} 50! = k\, 50!.$$

Luego $-50! = k\, 50!$, de donde $k = -1$. Finalmente, $Q(x) = -(x-1)(x-2)\cdots(x-50)$ y para $x = 51$:

$$P(51) = \frac{Q(51) + 50!}{51} = \frac{-(50)(49)\cdots(1) + 50!}{51} = \frac{-50! + 50!}{51} = 0.$$

□

9. Sean a, b, c, d, e, f números reales que satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3 &= a + 4b + 9c + 16d + 25e + 36f \\ 33 &= 4a + 9b + 16c + 25d + 36e + 49f \\ 333 &= 9a + 16b + 25c + 36d + 49e + 64f \end{aligned}$$

Halle el valor de $16a + 25b + 36c + 49d + 64e + 81f$.

$\boxed{\text{A) } 903}$ B) 1113 C) 1333 D) 2903 E) 3333

■ **Solución.** Definimos

$$S(n) = a\,n^2 + b\,(n+1)^2 + c\,(n+2)^2 + d\,(n+3)^2 + e\,(n+4)^2 + f\,(n+5)^2 = An^2 + Bn + C.$$

Tenemos que $S(1) = 3$, $S(2) = 33$, $S(3) = 333$ y queremos hallar $S(4)$. Luego, se cumple que:

$$A + B + C = 3 \quad (1)$$
$$4A + 2B + C = 33 \quad (2)$$
$$9A + 3B + C = 333. \quad (3)$$

Operando $(1) + (3) - 2 \times (2)$, obtenemos que:

$$(A+B+C) + (9A+3B+C) - 2(4A+2B+C) = 3 + 333 - 2 \cdot 33 \quad \Rightarrow \quad 2A = 270 \quad \Rightarrow \quad A = 135.$$

Reemplazando en (1) y (2), tenemos que $B + C = -132$ y $2B + C = -507$. Restando estas dos igualdades, resulta que $B = -507 + 132 = -375$. Además, $C = -132 + 375 = 243$. Finalmente:

$$S(4) = 135 \cdot 16 - 375 \cdot 4 + 243 = 2160 - 1500 + 243 = 903.$$

□

10. Halle el valor máximo de la siguiente función:

$$f(x) = 27x^2(1-x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

A) 1 B) 2 C) 3 $\boxed{\text{D) 4}}$ E) 5

■ **Solución.** Observamos que $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}$ y $1-x$ son reales no negativos. En consecuencia, por la Desigualdad de Medias tenemos que:

$$3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)(1-x)} \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 - x = 1.$$

Elevando ambos lados de la desigualdad al cubo, concluimos que

$$\frac{27x^2(1-x)}{4} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 27x^2(1-x) \leq 4,$$

de donde 4 es el máximo valor de la expresión y se alcanza cuando $\frac{x}{2} = 1 - x$, es decir, cuando $x = \frac{2}{3}$. □

11. En el triángulo ABC, sea M el punto medio de $\overline{AC}$. Si $3\angle BCA = \angle BAC$ y $\angle AMB = 45°$, determine la medida del ángulo $\angle BCA$.

A) 30° B) 35° $\boxed{\text{C) 22,5°}}$ D) 25° E) 24°

■ **Solución.** Denotamos $\alpha = \angle BCA$, entonces $\angle BAC = 3\alpha$ y $\angle ABC = 180° - 4\alpha$. Además, tenemos que $\angle BMC = 180° - 45° = 135°$ y $\angle CBM = 45° - \alpha$. Por Ley de Senos en $\triangle BMC$:

$$\frac{BC}{\text{sen}(135°)} = \frac{CM}{\text{sen}(45° - \alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{CM} = \frac{\text{sen}(135°)}{\text{sen}(45° - \alpha)}.$$

Por Ley de Senos en $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\text{sen}(3\alpha)} = \frac{AC}{\text{sen}(180° - 4\alpha)} = \frac{2CM}{\text{sen}(4\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{CM} = \frac{2\,\text{sen}(3\alpha)}{\text{sen}(4\alpha)}.$$

Igualando, se cumple que:

$$\frac{2\,\text{sen}(3\alpha)}{\text{sen}(4\alpha)} = \frac{\text{sen}(135°)}{\text{sen}(45° - \alpha)} \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{sen}(3\alpha)\,\text{sen}(45° - \alpha) = \text{sen}(135°)\,\text{sen}(4\alpha).$$

Usando identidades trigonométricas tenemos que:

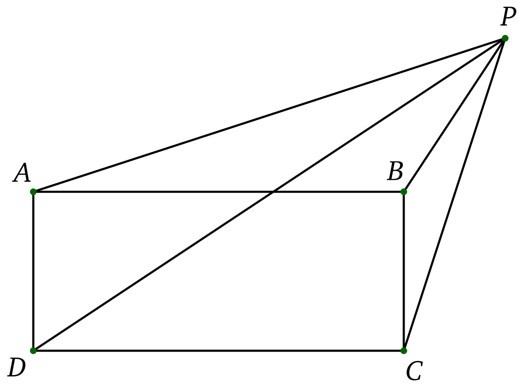
$$\begin{aligned}
2\,\text{sen}(3\alpha)\,\text{sen}(45° - \alpha) &= \text{sen}(135°)\,\text{sen}(4\alpha)\\
\cos(45° - 4\alpha) - \cos(45° + 2\alpha) &= \text{sen}(45°)\,\text{sen}(4\alpha)\\
\cos(45°)\cos(4\alpha) + \text{sen}(45°)\,\text{sen}(4\alpha) - \cos(45°)\cos(2\alpha) + \text{sen}(45°)\,\text{sen}(2\alpha) &= \text{sen}(45°)\,\text{sen}(4\alpha)\\
\cos(45°)\cos(4\alpha) - \cos(45°)\cos(2\alpha) + \text{sen}(45°)\,\text{sen}(2\alpha) &= 0.
\end{aligned}$$

Como $\cos(45°) = \text{sen}(45°) \neq 0$ y $\sin\alpha \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\cos(4\alpha) - \cos(2\alpha) + \text{sen}(2\alpha) &= 0\\
\text{sen}(2\alpha) &= \cos(2\alpha) - \cos(4\alpha)\\
2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha &= 2\,\text{sen}(3\alpha)\,\text{sen}\,\alpha\\
\cos\alpha &= \text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(90° - \alpha)
\end{aligned}$$

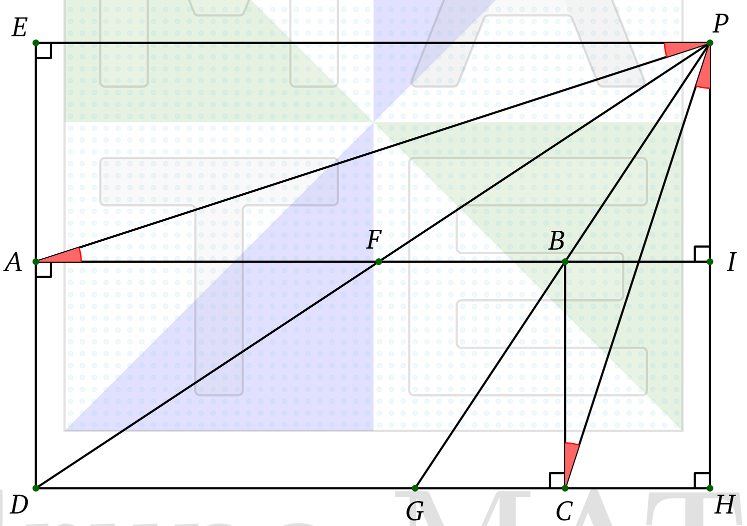
Como $\alpha < 45°$, entonces $90° - \alpha$ y $3\alpha \in (0, 180°)$ por lo que, $90° - \alpha = 3\alpha$ o $90° - \alpha + 3\alpha = 180°$ de donde $\alpha = 22{,}5°$ o $\alpha = 45°$. Finalmente, la única respuesta válida es $\alpha = 22{,}5°$. □

12. En la siguiente figura, $ABCD$ es un rectángulo y se cumple que $\angle PAB = \angle PCB$. Si $\angle BPC = 15°$, determine la medida del ángulo APD.



A) 12° B) $\boxed{\text{15°}}$ C) 20° D) 18° E) 16°

■ **Primera Solución.** Mostraremos que $\angle APD = \angle BPC$. Sea E la proyección de P sobre la recta AD, sea F la intersección de AB y DP, sea G la intersección de BP y CD, sea H la proyección de P sobre la recta CD, y sea I la proyección de P sobre la recta AB.



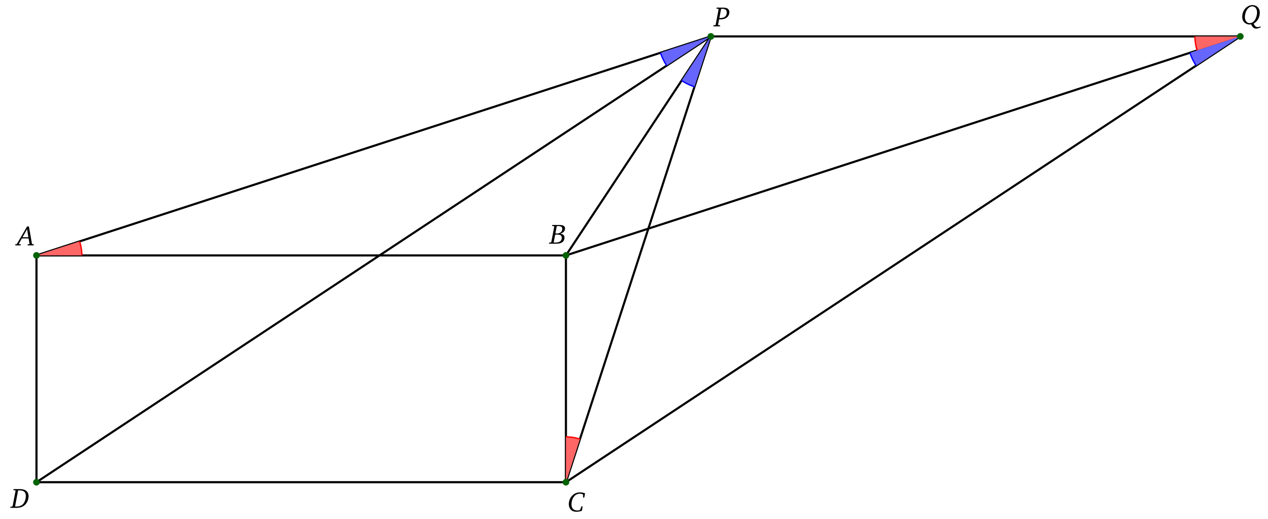
Como los triángulos PIB y BCG son semejantes, entonces $\frac{BC}{GC} = \frac{PI}{BI} = \frac{AE}{CH}$. Como los triángulos AEP y CHP son semejantes, entonces $\frac{AE}{CH} = \frac{EP}{PH}$. Como los triángulos DAF y DEP son semejantes, entonces $\frac{EP}{DE} = \frac{AF}{AD}$. Por lo tanto,

$$\frac{BC}{GC} = \frac{PI}{BI} = \frac{AE}{CH} = \frac{EP}{PH} = \frac{EP}{DE} = \frac{AF}{AD},$$

y como $\angle DAF = 90° = \angle GCB$, entonces los triángulos DAF y GCB son semejantes por el criterio lado - ángulo - lado. En consecuencia, $\angle AFD = \angle CBG$.

Finalmente, $\angle APD = \angle AFD - \angle FAP = \angle CBG - \angle BCP = \angle BPC$, que es lo que queríamos mostrar. □

■ **Segunda Solución.** Sea Q un punto en el plano de modo que $PQCD$ es un paralelogramo. Luego, $PQBA$ también es un paralelogramo, así que $\angle PQB = \angle BAP = \angle PCB$, por lo tanto, $PQCB$ es cíclico. Como $\angle APD = \angle BQC$ y $\angle BQC = \angle BPC$, entonces $\angle APD = \angle BPC = 15°$.

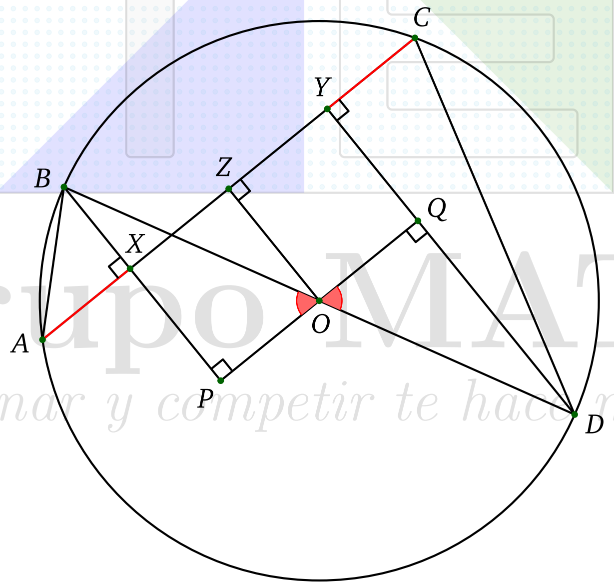


□

13. Sobre una circunferencia se ubican los puntos A, B, C y D, en orden consecutivo. Las proyecciones ortogonales de AB y CD sobre AC son de igual longitud. Determine la medida del arco $\overset{\frown}{BCD}$.

A) 120° B) $\boxed{\text{180°}}$ C) 144° D) 135° E) 90°

■ **Solución.** Sea O el centro de la circunferencia y sean X, Y y Z las proyecciones de B, D y O sobre AC, respectivamente. Luego, $AX = CY$ y $AZ = ZC$, así que $XO = OY$. Esto implica que la distancia de O hacia las rectas BX y DY son iguales. Sean P y Q las proyecciones de O sobre BX y DY, respectivamente. Luego, $OP = OQ$, así que los triángulos rectángulos OBP y ODQ son congruentes, por el criterio hipotenusa - cateto, lo que implica que $\angle BOP = \angle DOQ$. Finalmente, como P, O y Q son colineales, entonces B, O y D también son colineales, así que la medida del arco $\overset{\frown}{BCD}$ es 180°.



□

14. Sea $0 < \theta < \pi/2$ tal que $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \dfrac{5}{4}$. Determine el valor de $\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta$.

A) 115/256 B) 1/2 C) 115/64 D) $\boxed{\text{115/128}}$ E) 3/2

■ **Solución.** Elevando al cuadrado tenemos que $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{25}{16}$, lo que implica que $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{9}{16}$, de donde $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{9}{32}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{9}{32}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{23}{32} = \frac{115}{128}.$$

□

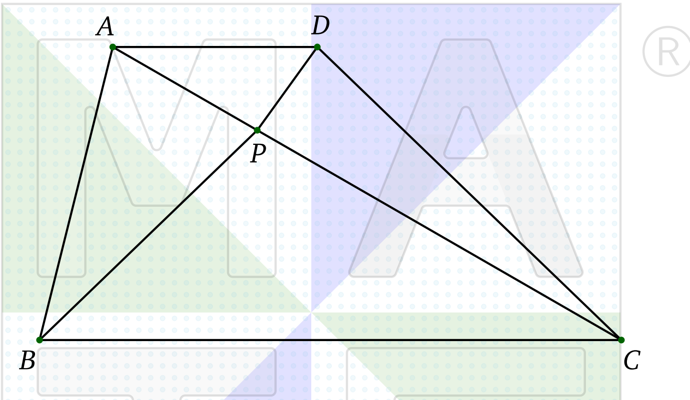
15. Los rayos OA y OB son las bisectrices de los ángulos que forman las manecillas del horario y minutero de un reloj a las 3:20 y 7:40, respectivamente. Calcule la medida del ángulo $\angle AOB$.

A) 115° B) 120° $\boxed{\text{C) } 125^\circ}$ D) 130° E) 135°

■ **Solución.** A las 3:20, el minutero está a 120° desde el 12 y el horario está a $90^\circ + 10^\circ = 100^\circ$. Luego, la bisectriz del ángulo menor de las manecillas de las 3:20, es decir, el rayo OA está a $\frac{100^\circ+120^\circ}{2} = 110^\circ$.

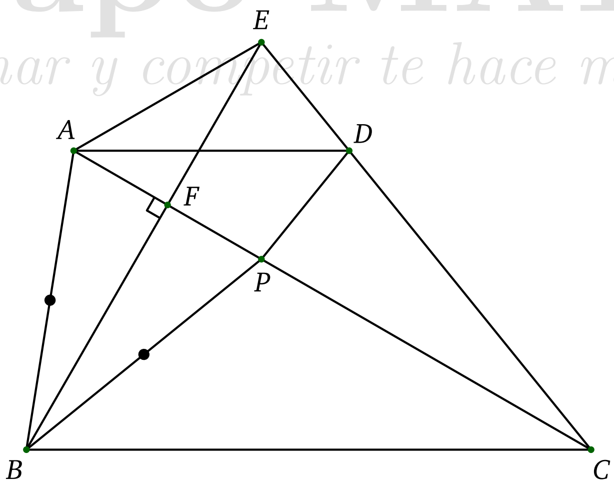
A las 7:40, el minutero está en 240°y el horario está a $210^\circ + 20^\circ = 230^\circ$. Por lo tanto, la bisectriz del ángulo menor de las manecillas de las 7:40, es decir, el rayo OB está a $\frac{240^\circ+230^\circ}{2} = 235^\circ$. Finalmente, el ángulo entre OA y OB es $235^\circ - 110^\circ = 125^\circ$. □

16. En la siguiente figura, $ABCD$ es un trapecio con AD paralelo a BC, $\angle ACD = 17^\circ$, $\angle ABP = 34^\circ$, $\angle PBC = 43^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Si los puntos A, P y C son colineales, determine la medida del ángulo ADP.



A) 46° $\boxed{\text{B) } 47^\circ}$ C) 49° D) 60° E) 58°

■ **Solución.** Es claro que $\angle APB = \angle CBP + \angle PCB = 73^\circ$ y $\angle BAP = 180^\circ - \angle ABP - \angle APB = 73^\circ$, así que $BA = BP$. Sea F la proyección de B sobre AC, y sea E el punto de intersección de FB con CD. Luego, $\angle EBA = \frac{\angle PBA}{2} = 17^\circ = \angle ECA$, lo que implica que el cuadrilátero $ABCE$ es cíclico. En consecuencia, $\angle CAE = \angle CBE = 43^\circ + 17^\circ = 60^\circ$, de donde, $\angle EPA = \angle EAP = 60^\circ$, por lo que el triángulo AEP es equilátero. Como $\angle PAD = \angle ACB = 30^\circ$, entonces $\angle DAE = \angle PAE - \angle PAD = 30^\circ = \angle DAP$. Finalmente, debido a que $AE = AP$, entonces los triángulos DAE y DAP son congruentes por el criterio lado - ángulo - lado, así que, $\angle ADP = \angle ADE = \angle BCD = 47^\circ$.



□

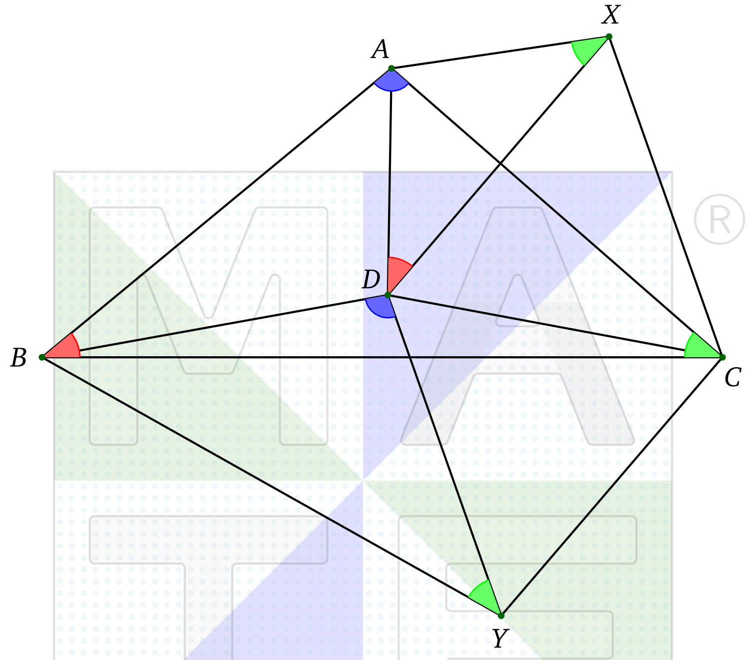
17. En el interior de un triángulo ABC se ubica un punto D de modo que

$$\angle ADC = \angle ABC + 60^\circ, \quad \angle CDB = \angle CAB + 60^\circ.$$

Además, $AB = 4$, $CD = 3$ y $BC = 6$. Determine la longitud de AD.

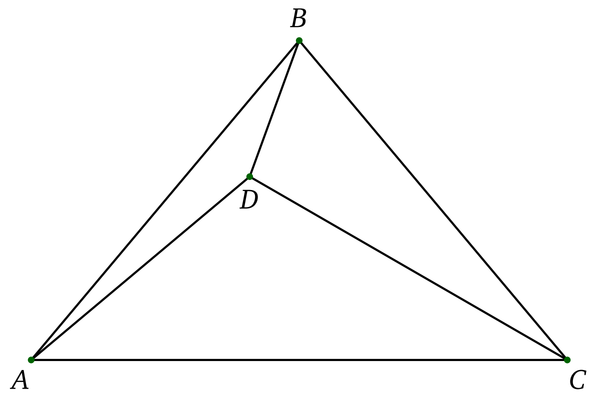
A) 1 | $\boxed{\text{B) } 2}$ | C) $\sqrt{3}$ | D) 3 | E) $\sqrt{2}$

■ **Solución.** Ubiquemos los puntos X y Y de modo que los triángulos ABC, ADX y DBY sean semejantes, con $\angle ABC = \angle ADX = \angle DBY$, $\angle BCA = \angle DXA = \angle BYD$ y $\angle CAB = \angle XAD = \angle YDB$, tal como se muestra a continuación:



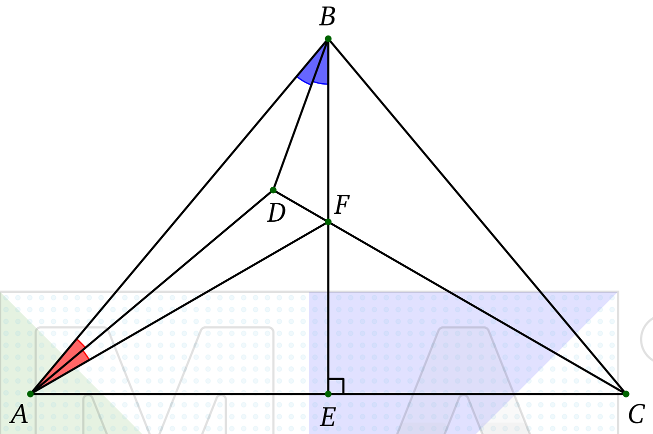
Supongamos que $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = ct$ y $BD = ck$. Luego, $DY = bk$, $BY = ak$, $AX = bt$, $DX = at$. Como los triángulos ABC y ADX son semejantes entonces los triángulos ABD y ACX son semejantes, y como los triángulos ABC y DBY son semejantes entonces los triángulos ABD y CBY son semejantes. Luego, $CX = AC \cdot \frac{BD}{AB} = bk = DY$ y $CY = BC \cdot \frac{AD}{AB} = at = DX$, lo que implica que $DXCY$ es un paralelogramo. Finalmente, como $\angle CDX = \angle CDA - \angle XDA = \angle CDA - \angle CBA = 60^\circ$, y como $\angle CDY = \angle CDB - \angle YDB = \angle CDB - \angle CAB = 60^\circ$, entonces los triángulos CDX y CDY son equiláteros. Por lo tanto, $DX = CD = 3$, y como $\frac{AD}{DX} = \frac{AB}{BC}$, entonces $AD = 3 \cdot \frac{4}{6} = 2$. □

18. En la siguiente figura, ABC es un triángulo isósceles tal que $AB = BC$. El punto interior D es tal que $\angle DBC = 3\angle DBA$, $\angle DAB = 10^\circ$ y $\angle DCB = 20^\circ$. Encuentre la medida del ángulo ABC.



A) 45° | B) 50° | C) 60° | D) 70° | $\boxed{\text{E) } 80^\circ}$

■ **Solución.** Sea E la proyección de B sobre AC. Es claro que $\angle FAB = \angle FCB = 20°$, así que $\angle FAD = \angle FAB - \angle DAB = 10° = \angle DAB$. Además, $\angle ABF = \frac{\angle ABC}{2} = 2\angle DBA$ y $\angle DBF = \angle ABF - \angle DBA = \angle DBA$. Por lo tanto, D es el incentro del triángulo ABF, por lo tanto, $\angle DFA = \frac{180°-20°-2\angle DBA}{2} = 80° - \angle DBA$. Finalmente, como $\angle FCA = \angle FAC = 90° - 20° - 2\angle DBA = 70° - 2\angle DBA$ y como $80° - \angle DBA = \angle DFA = 2\angle FCA = 140° - 4\angle DBA$, así que $\angle DBA = 20°$ y $\angle ABC = 4\angle DBA = 80°$.



□

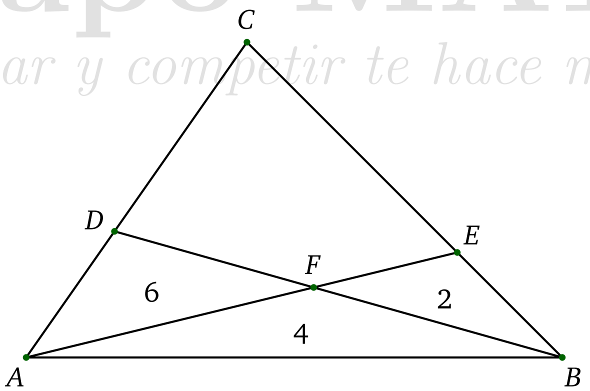
19. Encuentre el mayor número real x, con $x < \pi/2$, que satisface la desigualdad:
$$\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \le 3$$

$\boxed{\text{A) } \pi/6}$ B) $\pi/4$ C) $\pi/3$ D) 0 E) $-\pi/3$

■ **Solución.** Como
$$\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \le 3 \iff \frac{2}{1-\operatorname{sen} x} - 1 \le 3 \iff \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} \le 2.$$
Cuando $x = \frac{\pi}{6}$, tenemos que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y se satisface la igualdad de la desigualdad. Si $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x < 1$, por lo que $0 < 1 - \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$, en consecuencia, $\frac{1}{1-\operatorname{sen} x} > 2$, es decir, estos valores no cumplen la desigualdad.

Finalmente, $x = \frac{\pi}{6}$ es el mayor valor menor a $\frac{\pi}{2}$ que satisface la desigualdad. □

20. En la siguiente figura, las áreas de los triángulos ADF, AFB, EFB son 6, 4 y 2; respectivamente. Determine el área de cuadrilátero $DFEC$.



A) 40 B) 36 C) 24 D) 50 $\boxed{\text{E) } 48}$

■ **Solución.** Sea $x = [FEC]$. Luego, como $\frac{[ACF]}{[FCE]} = \frac{[AFB]}{[BFE]} = 2$, entonces $[ACF] = 2x$, de donde, $[DCF] = [ACF] - [ADF] = 2x - 6$. Además, como $\frac{[DCF]}{[FCB]} = \frac{[ADF]}{[AFB]} = \frac{3}{2}$, entonces $\frac{2x-6}{x+2} = \frac{3}{2}$, así que $x = 18$. Por lo tanto, $[DFEC] = [DCF] + [FEC] = 3x - 6 = 48$. □