Solucionario del Examen de la Primera Fase - 4° de Secundaria

REALIZADO POR GRUPO MATE

1. Determine la cifra de las unidades de 3^{2026}.

A) 1 B) 2 C) 3 $\boxed{\text{D) 9}}$ E) 7

■ **Solución.** Sabemos que $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, por lo que $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$ para todo k entero positivo. Como el exponente 2026 cumple que $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, entonces

$$3^{2026} = 3^{4\cdot 506+2} \equiv 1 \cdot 3^2 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10}.$$

Por lo tanto, la cifra de las unidades es 9. □

2. Determine cuántos números enteros positivos $\overline{abc}$ de tres cifras cumplen que $a^2 + b^2 + c^2$ divide a 17.

A) 11 B) 10 C) 9 $\boxed{\text{D) 8}}$ E) 7

■ **Solución.** El número 17 es primo. Los únicos divisores positivos de 17 son 1 y 17. Analicemos para que valores de a, b y c se cumple que $a^2 + b^2 + c^2$ es 1 o 17.

- Si es 1, entonces la única posibilidad es $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, es decir, $\overline{abc} = 100$.
- Si es 17, buscamos ternas de dígitos con suma de cuadrados 17. Las únicas posibilidades son:
  - $4^2 + 1^2 + 0^2 = 16 + 1 + 0 = 17$, de donde a, b y c son en algún orden 4, 1 y 0, con $a \neq 0$. Luego, hay 4 números $\overline{abc}$ que cumplen: 410, 401, 140 y 104.
  - $3^2 + 2^2 + 2^2 = 9 + 4 + 4 = 17$, de donde a, b y c son en algún orden 3, 2 y 2. Luego, hay 3 números $\overline{abc}$ que cumplen: 322, 232 y 223.

Finalmente, hay $1 + 4 + 3 = 8$ números que cumplen lo pedido. □

3. En una fila hay 10 casilleros consecutivos y se desea colocar 4 fichas idénticas, con a lo más una por cada casillero, de modo que no haya dos fichas en casilleros consecutivos. ¿Cuántas distribuciones diferentes son posibles?

A) 25 B) 30 $\boxed{\text{C) 35}}$ D) 40 E) 45

■ **Solución.** Sea x_1 la cantidad de espacios antes de la primera ficha, x_2 la cantidad de espacios entre la primera y segunda, x_3 entre la segunda y la tercera, x_4 entre la tercera y la cuarta, y x_5 después de la cuarta. Tenemos que $x_1 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ y $x_2, x_3, x_4 \geq 1$. Además, se cumple que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 - 4 = 6.$$

Convenientemente, hacemos el cambio $y_1 = x_1 + 1$, $y_5 = x_5 + 1$, con $y_i \geq 0$, obteniendo que

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 6 + 2 = 8. \tag{1}$$

Finalmente, el problema se reduce a hallar la cantidad de soluciones en números enteros positivos de la ecuación (1). Para visualizar esto mediante objetos, imaginamos 8 puntos en una fila:

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

Estos 8 puntos dejan entre sí 7 espacios disponibles. Para dividir estos 8 objetos en 5 grupos ordenados (donde cada grupo representa el valor de una variable y debe tener al menos un objeto), basta con elegir 4 espacios de los 7 posibles para colocar "separadores". De esta manera, la cantidad de soluciones en los enteros positivos de (1) es igual a la cantidad de formas de elegir 4 espacios de los 7 disponibles, lo que es igual a $\binom{8-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$.

En conclusión, hay 35 distribuciones diferentes. □

4. En una campaña escolar se recaudaron S/ 313 mediante la venta de lapiceros de S/ 4 y cuadernos de S/ 15. Si con dicha recaudación el número total de artículos vendidos fue el máximo posible, ¿cuántos lapiceros se vendieron?

A) 62 B) $\boxed{\text{B) 67}}$ C) 71 D) 74 E) 78

■ **Solución.** Sean x lapiceros y y cuadernos. La recaudación es $4x+15y=313$ y queremos maximizar $x+y$ con x, y enteros no negativos.

Como $4x=313-15y$ es múltiplo de 4, entonces $313-15y \equiv 0 \pmod 4$. Puesto que $313 \equiv 1 \pmod 4$ y $15 \equiv -1 \pmod 4$, tenemos que

$$1-(-1)y \equiv 0 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad 1+y \pmod 4 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 3 \pmod 4.$$

Luego, los valores posibles de y son $3, 7, 11, \ldots$. Debido a que

$$x+y=\frac{313-15y}{4}+y=\frac{313-11y}{4},$$

concluimos que el mayor $x+y$ se obtiene con el menor y posible. El menor $y \geq 0$ con $y \equiv 3 \pmod 4$ es $y=3$, entonces $x=\frac{313-45}{4}=67$ y se cumple que $x+y=70$. Por lo tanto, se vendieron 67 lapiceros. □

5. Si $\text{MCD}(\overline{abc}, \overline{bac})=42$, determine $a+b+c$.

A) 9 B) 12 $\boxed{\text{C) 15}}$ D) 21 E) 24

■ **Solución.** Como el MCD de $\overline{abc}$ y $\overline{bac}$ es $42=2\cdot 3\cdot 7$, tenemos que ambos números son múltiplos de 2, 3 y 7.

- Múltiplo de 2: la última cifra c debe ser par.
- Múltiplo de 3: la suma $a+b+c$ debe ser múltiplo de 3.
- Múltiplo de 7: ambos números divisibles entre 7.

Además, la diferencia $\overline{abc}-\overline{bac}=90(a-b)$ debe ser múltiplo de 42, luego

$$42 \mid 90(a-b) \quad \Rightarrow \quad 7 \mid 15(a-b) \quad \Rightarrow \quad 7 \mid (a-b).$$

Luego, $a-b$ solo puede ser -7, 0, 7. Si $a-b=0$, entonces $a=b$, por lo que

$$42=\text{MCD}(\overline{abc}, \overline{bac})=\text{MCD}(\overline{abc}, \overline{abc})=\overline{abc},$$

lo que claramente es absurdo.

Si $a-b=7$ o $a-b=-7$, tenemos que los únicos pares (a,b) posibles, pues deben ser dígitos distintos de 0, son $(8,1), (9,2), (1,8), (2,9)$. Evaluemos estas posibilidades:

- Para $(9,2)$ y $(2,9)$, los números son en algún orden: $\overline{92c}$ y $\overline{29c}$. Como la suma $9+2+c=11+c$ debe ser múltiplo de 3, entonces $c \equiv 1 \pmod 3$. Puesto que c es par, la única posibilidad es $c=4$. Además, se verifica que $924=42\cdot 22$, $294=42\cdot 7$, por lo que MCD(924,294)=42. En consecuencia, $a=9, b=2, c=4$ o $a=2, b=9, c=4$, en ambos casos la suma es 15.
- Para $(8,1)$ y $(1,8)$, los números son en algún orden: $\overline{81c}$ y $\overline{18c}$. Como la suma $8+1+c=9+c$ debe ser múltiplo de 3, entonces c es múltiplo de 3. Puesto que c es par, la única posibilidad es $c=6$. Sin embargo ni 816 ni 186 son múltiplo de 7.

Finalmente, $a+b+c$ solo puede ser 15. □

6. Determine el producto de todas las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}=\sqrt{3}.$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 $\boxed{\text{E) } -2}$

■ **Solución.** Por las raíces cuadradas, se cumple que $x+2 \geq 0$ y $1-x \geq 0$, es decir, $-2 \leq x \leq 1$. Al elevar al cuadrado la ecuación del problema, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x})^2 &= 3\\
(x+2)+(1-x)+2\sqrt{(x+2)(1-x)} &= 3\\
3+2\sqrt{(x+2)(1-x)} &= 3\\
2\sqrt{(x+2)(1-x)} &= 0\\
\sqrt{(x+2)(1-x)} &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x=-2$ o $x=1$. Ambas pertenecen al dominio y es fácil verificar que satisfacen la ecuación. En conclusión, el producto de las soluciones es $(-2)\times 1=-2$. □

7. El polinomio $p(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$ es divisible por x^2-x+1. Además, se sabe que $p(1)=5$ y $p(-1)=3$. Determine el valor de $p(2)$.

A) 50 B) 60 C) 64 $\boxed{\text{D) } 57}$ E) 56

■ **Solución.** Como x^2-x+1 es divisor de $p(x)$, existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x)=(x^2-x+1)q(x)$. De los datos, para $x=1$, tenemos que $p(1)=(1^2-1+1)q(1)=q(1)=5$, y para $x=-1$, tenemos que $p(-1)=((-1)^2-(-1)+1)q(-1)=3q(-1)=3$, por lo que $q(-1)=1$. Además, el término independiente de p es 1, es decir, $p(0)=1$, lo que implica que $p(0)=(0^2-0+1)q(0)=q(0)=1$. Como $p(x)$ y x^2-x+1 son mónicos, concluimos que $q(x)$ es un polinomio mónico de grado 3 con término independiente 1. Ahora, sea $q(x)=x^3+mx^2+nx+1$. Luego,

$$q(1)=1+m+n+1=5 \quad\Rightarrow\quad m+n=3;$$

$$q(-1)=-1+m-n+1=1 \quad\Rightarrow\quad m-n=1.$$

En consecuencia, $m=2$ y $n=1$, de modo que $q(x)=x^3+2x^2+x+1$. Finalmente,

$$p(2)=(2^2-2+1)q(2)=(4-2+1)(8+8+2+1)=3\times 19=57.$$

□

8. Determine el menor número real c tal que la siguiente desigualdad se cumple para todos los números reales positivos x, y:

$$x^3+y^2 \geq 3x+4y-c.$$

A) 5 $\boxed{\text{B) } 6}$ C) 7 D) 4 E) 8

■ **Solución.** Tenemos que

$$\begin{aligned}
x^3+y^2 &\geq 3x+4y-c\\
x^3-3x+2+y^2-4y+4 &\geq 6-c\\
(x-1)^2(x+2)+(y-2)^2 &\geq 6-c
\end{aligned}$$

Como esta desigualdad debe ser cierta para todo x y y reales positivos, en particular para $x=1$ y $y=2$ se debe cumplir, lo que implica que $0 \geq 6-c$, es decir, $c \geq 6$. Además, se verifica fácilmente que la desigualdad $(x-1)^2(x+2)+(y-2)^2 \geq 0 = 6-6$ se cumple para todo x y y reales. En consecuencia, el menor c que satisface lo pedido es 6. □

9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que:

$$2f\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=3x+9,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Determine el valor de $f(3)$.

A) 1 B) 3 C) 5 $\boxed{\text{D) 7}}$ E) 9

■ **Solución.** Como la ecuación funcional se cumple para todo x real, entonces se cumple para $x=k$ y para $x=-k$, donde k puede tomar cualquier valor real. Por lo tanto, con $x=k$ tenemos que

$$2f\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)+f\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)=3k+9 \tag{1}$$

y con $x=-k$ tenemos que

$$\begin{aligned}2f\left(\sqrt{(-k)^2+1}-k\right)+f\left(\sqrt{(-k)^2+1}-(-k)\right)&=3(-k)+9\\ 2f\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)+f\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)&=-3k+9.\end{aligned} \tag{2}$$

Multiplicando (1) por 2 y restando (2), obtenemos que

$$\begin{aligned}3f\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)&=9k+9\\ f\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)&=3k+3,\end{aligned} \tag{3}$$

que se cumple para cualquier k real. Como nos piden $f(3)$, bastará reemplazar $k=\frac{4}{3}$ en (3), ya que

$$\sqrt{k^2+1}+k=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}+\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{16}{9}+1}+\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{25}{9}}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{9}{3}=3.$$

Finalmente, al reemplazar $k=\frac{4}{3}$ en (3) tenemos que

$$f(3)=3\left(\frac{4}{3}\right)+3=4+3=7.$$

□

10. Calcule:

$$\frac{(7^4+64)(15^4+64)(23^4+64)\cdots(79^4+64)}{(3^4+64)(11^4+64)(19^4+64)\cdots(75^4+64)}$$

A) 1200 $\boxed{\text{B) 1313}}$ C) 1397 D) 1296 E) 1415

■ **Solución.** Usamos la factorización:

$$n^4+64=(n^2-4n+8)(n^2+4n+8)=\left((n-2)^2+4\right)\left((n+2)^2+4\right).$$

Para cada término del numerador con $n=7,15,23,\ldots,79$ y del denominador con $n=3,11,19,\ldots,75$ (ambos progresiones aritméticas de diferencia 8), escribimos:

$$(7+8k)^4+64=\left((5+8k)^2+4\right)\left((9+8k)^2+4\right),$$

$$(3+8k)^4+64=\left((1+8k)^2+4\right)\left((5+8k)^2+4\right),$$

con $k=0,1,\ldots,9$.

Sustituyendo en la fracción:

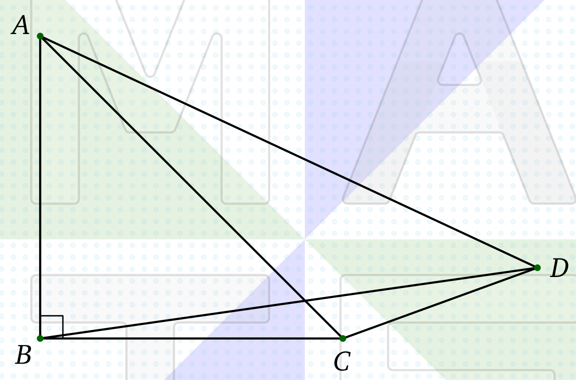
$$\frac{\big((5)^2+4\big)\big((9)^2+4\big)}{\big((1)^2+4\big)\big((5)^2+4\big)}\cdot\frac{\big((13)^2+4\big)\big((17)^2+4\big)}{\big((9)^2+4\big)\big((13)^2+4\big)}\cdot\frac{\big((21)^2+4\big)\big((25)^2+4\big)}{\big((17)^2+4\big)\big((21)^2+4\big)}\cdots\frac{\big((77)^2+4\big)\big((81)^2+4\big)}{\big((73)^2+4\big)\big((77)^2+4\big)},$$

notamos que en el numerador están todos los números de la forma $\big((1+4i)^2+4\big)$ con $i=1,2,\ldots,20$ y en el denominador tienen la misma forma $\big((1+4j)^2+4\big)$ pero con $j=0,2,\ldots,19$. En consecuencia, todos los términos se cancelan excepto 81^2+4 en el numerador y 1^2+4 en el denominador. Por lo tanto, la fracción queda reducida a:

$$\frac{81^2+4}{1^2+4}=\frac{6561+4}{5}=\frac{6565}{5}=1313.$$

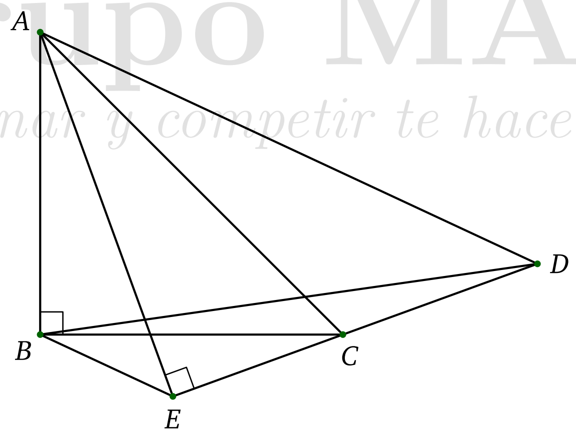
□

11. En la siguiente figura, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo isósceles y $\angle ADC=45°$. Si el área del triángulo ABD es 10, determine la longitud de AD.



A) $8\sqrt{3}$ B) 12 C) $7\sqrt{8}$ D) $\boxed{2\sqrt{10}}$ E) 14

■ **Solución.** Sea E la proyección de A sobre CD. Como $\angle ABC=\angle AEC=90°$, entonces el cuadrilátero $ABEC$ es cíclico. Luego, $\angle BEC=180°-\angle BAC=135°$. Finalmente, como $\angle BED+\angle EDA=135°+45°=180°$, entonces BE es paralelo a AD, lo que implica que $[ABD]=[AED]=\frac{AD^2}{4}$, así que $AD=2\sqrt{10}$.

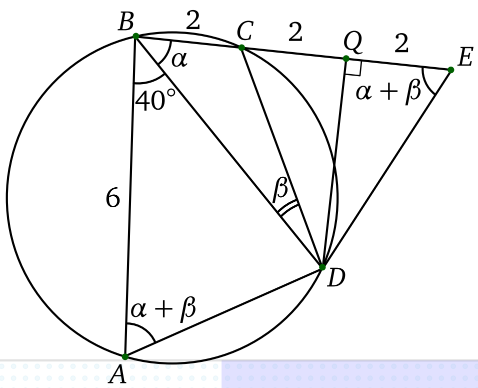


□

12. Sobre una circunferencia se ubican los puntos A,B,C y D, en orden consecutivo, tales que $AB=6$, $BC=2$ y $\angle ABD=40°$. Sea Q un punto del plano tal que C es un punto del segmento BQ, $CQ=2$ y $\angle BQD=90°$. Si $BD>AB$, determine la medida del ángulo $\angle CBD$.

A) 30° B) 36° C) $\boxed{40°}$ D) 45° E) 50°

■ **Solución.** Sea $\angle CBD = \alpha$ y sea $\angle CDB = \beta$, en consecuencia, $\angle QCD = \angle BAD = \alpha + \beta$. Sea E el punto en la prolongación de BQ tal que $QE = 2$. Como DQ es mediatriz del triángulo CDE, entonces $\angle DEC = \angle ECD = \alpha + \beta$



Como $AB = 6 = BE$, entonces $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{BD}$. Luego, por la Ley de Senos en los triángulos ABD y BED:

$$\frac{\operatorname{sen}(140^\circ - (\alpha+\beta))}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - (2\alpha+\beta))}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(140^\circ - (\alpha+\beta)) = \operatorname{sen}(180^\circ - (2\alpha+\beta)).$$

Tengamos en cuenta que:

$$140^\circ - (\alpha+\beta) \in (0, 180^\circ) \quad \text{y} \quad 180^\circ - (2\alpha+\beta) \in (0, 180^\circ).$$

Luego, solo pueden suceder dos hechos:

$$140^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - (2\alpha+\beta) \quad \text{o} \quad 140^\circ - (\alpha+\beta) + 180^\circ - (2\alpha+\beta) = 180^\circ.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\alpha = 40^\circ \quad \text{o} \quad 3\alpha + 2\beta = 140^\circ.$$

Puesto que $BD > AB$, entonces $\angle BAD > \angle BDA$, lo que implica que

$$\alpha + \beta > 140^\circ - (\alpha+\beta) \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + 2\beta > 140^\circ,$$

es decir, es imposible que $140^\circ = 3\alpha + 2\beta$. En conclusión, $\angle CBD = \alpha = 40^\circ$.

Observación: A pesar de que hemos llegado a una respuesta que está en las alternativas, la figura de la situación planteada no existe, pues si dicha figura fuera factible, se cumpliría que $BD = 4\sec(40^\circ) \approx 5{,}22 < 6 = AB$. Por otro lado, si quitamos la condición de que $BD > AB$, habría dos valores para α, uno de estos valores sería 40° y el otro valor es la única solución en el primer cuadrante de $\tan\left(20 + \frac{\alpha}{2}\right)\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ que sería aproximadamente $33{,}71^\circ$. □

13. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{2}$. Determine el valor de $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta$.

$\boxed{\text{A) } \dfrac{7}{32}}$ B) $\dfrac{3}{16}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{8}$

■ **Solución.** Como $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{2}$, elevando al cuadrado tenemos que:

$$1 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\frac{9}{4} - 1}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta=1-2\left(\frac{5}{8}\right)^2=1-2\cdot\frac{25}{64}=1-\frac{25}{32}=\frac{7}{32}.$$

Observación: A pesar de que hemos llegado a una respuesta que está en las alternativas, la situación planteada no es posible, pues $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. □

14. En un triángulo ABC se tiene que $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos B=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Halle la medida del ángulo C.

A) 105° B) 108° C) 120° $\boxed{\text{D) } 135°}$ E) 150°

■ **Solución.** Como $A,B\in(0°,180°)$ y los senos son positivos:

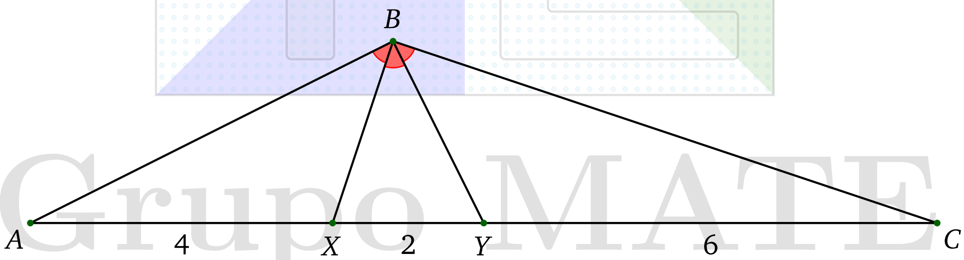
$$\operatorname{sen}A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \operatorname{sen}B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Usando estos datos y el hecho de que $C=180°-(A+B)$, concluimos que:

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos(A+B)=-\big(\cos A\cos B-\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\big)\\ \cos C&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \cos C&=\frac{-6+1}{\sqrt{50}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}\\ \cos C&=\frac{-1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $C=135°$, pues es la única opción válida en el intervalo $(0°,180°)$. □

15. En la siguiente figura $AX=4$, $XY=2$, $YC=6$, y $\angle ABX=\angle XBY=\angle YBC$. Determine la medida del ángulo $\angle ABC$.



A) 120° B) 115° $\boxed{\text{C) } 135°}$ D) 150° E) 108°

■ **Solución.** Supongamos que $BX=x$ y $BY=y$. Luego, como $\frac{AB}{BY}=\frac{AX}{XY}=2$, entonces $AB=2y$; como $\frac{BC}{BX}=\frac{CY}{YX}=3$, entonces $BC=3x$. Además, como $BX^2=AB\cdot BY-AX\cdot XY$ y $BY^2=XB\cdot BC-XY\cdot YC$, entonces

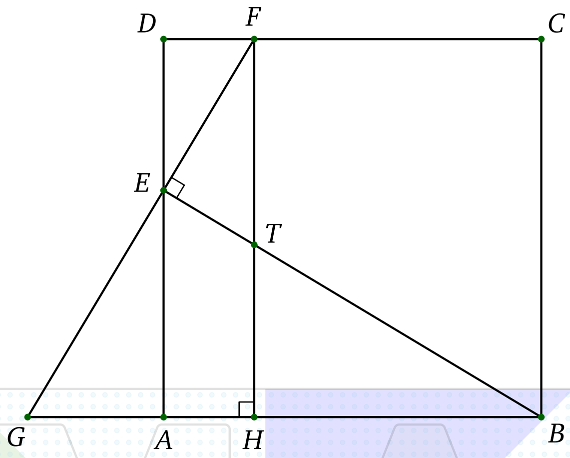
$$\begin{aligned}x^2&=2y^2-8,\\ y^2&=3x^2-12.\end{aligned}$$

Luego, $x^2=2(3x^2-12)-8$, de donde, $x^2=\frac{32}{5}$, $y^2=\frac{36}{5}$ y $xy=\frac{24}{5}\sqrt{2}$.
En el triángulo BXY, resulta que $XY^2=BX^2+BY^2-2BX\cdot BY\cos\angle XBY$, entonces

$$4=\frac{32}{5}+\frac{36}{5}-2\left(\frac{24}{5}\sqrt{2}\right)\cos\angle XBY,$$

así que $\cos\angle XBY=\frac{\sqrt{2}}{2}$, lo que implica que $\angle XBY=45°$. Por lo tanto, $\angle ABC=3\angle XBY=135°$. □

16. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado, y las áreas de los triángulos EFT y AEG son 4 y 6, respectivamente. Determine el área del triángulo THB.



A) $7\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{6}$ C) 8 D) 12 $\boxed{\text{E) } 10}$

■ **Solución.** Por Pitágoras en el triángulo rectángulo FHB: $HF^2+HB^2=FB^2$ y en el triángulo rectángulo EAB: $AE^2+AB^2=EB^2$, y como $AB=HF$, entonces $HB^2-AE^2=FB^2-EB^2$. Nuevamente, por Pitágoras en el triángulo rectángulo FEB: $FE^2+EB^2=FB^2$, por lo tanto, $HB^2-AE^2=EF^2$, que equivale a $HB^2=EF^2+AE^2$.

Finalmente, como los triángulos EAG, FET y BHT son semejantes, entonces $\frac{[EAG]}{AE^2}=\frac{[FET]}{EF^2}=\frac{[BHT]}{HB^2}$, así que $\frac{[EAG]+[FET]}{AE^2+EF^2}=\frac{[BHT]}{HB^2}$, por lo tanto, $[BHT]=[EAG]+[FET]=6+4=10$. □

17. Encuentre el mayor número real x, con $x<2\pi$, tal que:

$$1\leq\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}.$$

$\boxed{\text{A) } \pi}$ B) 2π C) 0 D) $\pi/2$ E) $3\pi/2$

■ **Solución.** Como

$$1\leq\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\quad\Leftrightarrow\quad 1\leq\frac{2}{1-\operatorname{sen}x}-1\quad\Leftrightarrow\quad 1\leq\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}.$$

Cuando $x=\pi$, tenemos que $\operatorname{sen}\pi=0$ y se satisface la igualdad de la desigualdad. Si $\pi<x<2\pi$, tenemos que $-1<\operatorname{sen}x<0$, por lo que $1<1-\operatorname{sen}x<2$, en consecuencia, $\frac{1}{2}<\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}<1$, es decir, estos valores no cumplen la desigualdad.

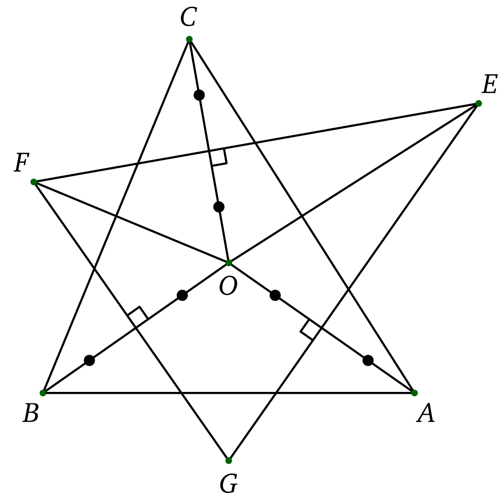
Finalmente, $x=\pi$ es el mayor valor menor a 2π que satisface la desigualdad. □

18. En un triángulo ABC, sea O su circuncentro. Las mediatrices de OA y OB intersecan a la mediatriz de OC en los puntos E y F, respectivamente. Si las medidas de los ángulos $\angle ACB$ y $\angle EOF$ son x y z, respectivamente, entonces:

A) $z=3x-60°$ B) $z=2x$ C) $z=x+60°$ D) $z=90°+x$ $\boxed{\text{E) } z+x=180°}$

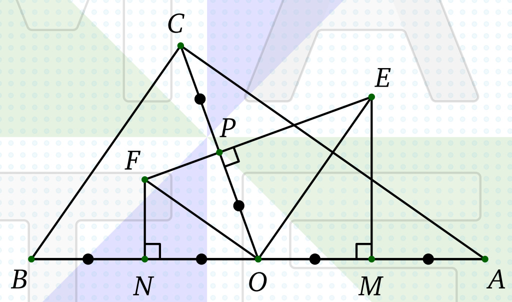
■ **Solución.** Hay dos casos por analizar: si $\angle ACB\neq 90°$ y si $\angle ACB=90°$.

- Si $\angle ACB\neq 90°$. Supongamos que G es la intersección de las mediatrices de OA y OB. Es claro que las distancias de O a EF, FG y GE son iguales a la mitad de OC, OB y OA respectivamente. Por lo tanto, O es el incentro del triángulo EFG, pues $\frac{OA}{2}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{2}$.



Luego, como $\angle BOA = 2\angle ACB$, entonces $\angle EGF = 180° - \angle BOA = 180° - 2\angle ACB$, y como $\angle EOF = 90° + \frac{\angle EGF}{2} = 180° - \angle ACB$, entonces $z + x = 180°$.

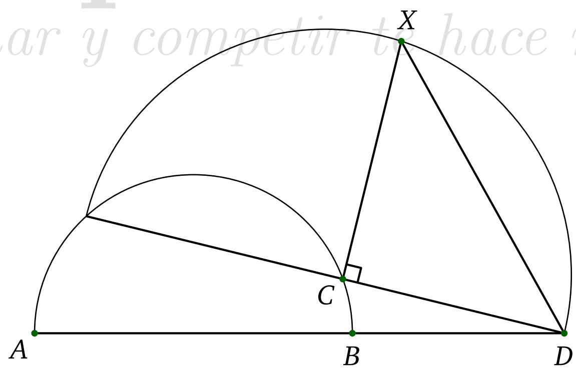
- Si $\angle ACB = 90°$. Sean M, N y P los puntos medios de OA, OB y OC, respectivamente. Como $OM = ON = OP$ entonces $\angle MOE = \angle EOP$ y $\angle POF = FON$, así que $\angle EOF = 90°$. Por lo tanto, $x + z = 90° + 90° = 180°$



Es fácil descartar las demás alternativas usando este caso.

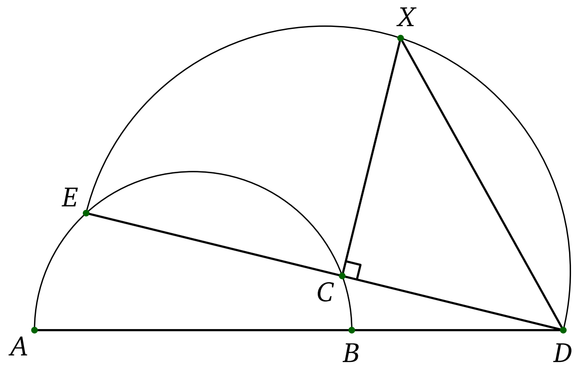
Aclaración: El segundo caso se pudo resolver de manera similar al primero, pues G tendería al infinito (hacia abajo) y se seguiría cumpliendo que O es el incentro del "triángulo" EFG. □

19. En la siguiente figura se tienen dos semicircunferencias, de modo que $\angle XCD = 90°$, $AB = 6$ y $BD = 4$. Calcule la longitud de XD.



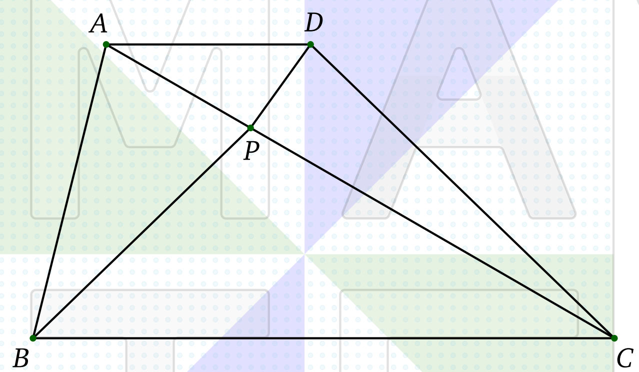
A) $8\sqrt{3}$ B) 12 C) $7\sqrt{8}$ D) $\boxed{2\sqrt{10}}$ E) 14

■ **Solución.** Sea DE el diámetro de la semicircunferencia más grande. Luego, como $\angle EXD = \angle DCX = 90°$, entonces $XD^2 = DC \cdot DE$. En la semicircunferencia más pequeña, $DC \cdot DE = DB \cdot DA$, así que $XD^2 = DB \cdot DA = 4 \cdot 10$, lo que implica que $XD = 2\sqrt{10}$.



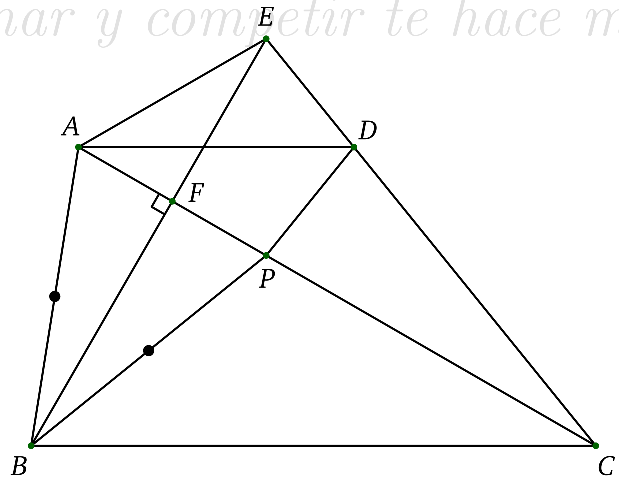
□

20. En la siguiente figura, $ABCD$ es un trapecio con AD paralelo a BC, $\angle ACD = 16°$, $\angle ABP = 32°$, $\angle PBC = 44°$ y $\angle ACB = 30°$. Si los puntos A, P y C son colineales, determine la medida del ángulo ADP.



$\boxed{\text{A) } 46°}$ B) 44° C) 38° D) 60° E) 58°

■ **Solución.** Es claro que $\angle APB = \angle CBP + \angle PCB = 74°$ y $\angle BAP = 180° - \angle ABP - \angle APB = 74°$, así que $BA = BP$. Sea F la proyección de B sobre AC, y sea E el punto de intersección de FB con CD. Luego, $\angle EBA = \frac{\angle PBA}{2} = 16° = \angle ECA$, lo que implica que el cuadrilátero $ABCE$ es cíclico. En consecuencia, $\angle CAE = \angle CBE = 44° + 16° = 60°$, de donde, $\angle EPA = \angle EAP = 60°$, por lo que el triángulo AEP es equilátero. Como $\angle PAD = \angle ACB = 30°$, entonces $\angle DAE = \angle PAE - \angle PAD = 30° = \angle DAP$. Finalmente, debido a que $AE = AP$, entonces los triángulos DAE y DAP son congruentes por el criterio lado - ángulo - lado, así que, $\angle ADP = \angle ADE = \angle BCD = 46°$.



□