Olimpiada Matemática de los Andes

I Olimpiada Matemática de Los Andes

Ambato, 26 de abril al 1 de mayo de 2026

Prueba Individual 1 - Nivel 4

27 de abril de 2026

Indicaciones:

- La duración de la prueba es de **4 horas**.
- En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas al jurado en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas. No puedes explicar tus soluciones al jurado dentro de los 30 minutos iniciales.
- Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tiene **tres** intentos por cada problema.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

---

1. Para los números enteros positivos a, b y n, se cumple la igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}.$$

Demuestre que el número $\sqrt{ab}$ es un entero.

2. Sean $ABCDEF$ y $AGHIJK$ hexágonos regulares de modo que G está en el interior de $ABCDEF$ y de modo que I es punto medio de EF. Demuestre que B, H y E son colineales.

3. Se tienen 100 bolas alineadas en una fila: 50 rojas y 50 verdes. Se eliminan exactamente 50 bolas, manteniendo el orden de las bolas restantes. Demuestre que es posible elegir las 50 bolas a eliminar de modo que, en la secuencia resultante, las primeras 30 bolas sean todas del mismo color y las últimas 20 bolas sean todas del otro color.

4. Decimos que la pareja de enteros positivos (a, b) es *cuadrada* si $ab + 1$ es un cuadrado perfecto. Por ejemplo, la pareja $(3, 16)$ es una pareja cuadrada porque $3 \cdot 16 + 1 = 7^2$. ¿Para qué valores enteros positivos de n es posible dividir el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en n parejas cuadradas?