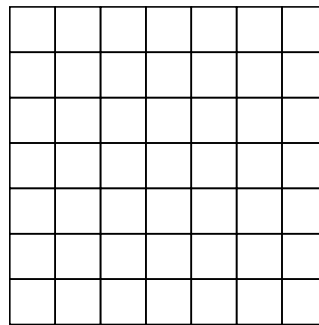




Indicaciones:

- La duración de la prueba es de **4 horas**.
- En los primeros 30 minutos puedes hacer preguntas al jurado en caso tengas alguna duda acerca de los **enunciados** de los problemas. No puedes explicar tus soluciones al jurado dentro de los 30 minutos iniciales.
- Cada problema será calificado como resuelto o como no resuelto. Tiene **tres** intentos por cada problema.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.

5. Considera un tablero de ajedrez de 7×7 que inicialmente tiene todas las casillas blancas.



Empezamos a pintar casillas de negro, una a la vez, siguiendo esta regla:

- La primera casilla se puede elegir libremente.
- Cada nueva casilla que se pinta debe ser adyacente, es decir, compartir un lado completo exclusivamente con la casilla que se acaba de pintar justo antes.

Al final, la figura pintada será una “serpiente” conectada de casillas negras. Dé un ejemplo de cómo pintar una serpiente de 32 casillas.

6. Sean a , b y c enteros positivos cualesquiera. ¿Es cierto que existe un entero positivo n para el cual $a \cdot n$ es el cubo de algún número entero, $b \cdot n$ es la cuarta potencia de algún número entero y $c \cdot n$ es la quinta potencia de algún número entero?
7. Sea n un entero mayor que 1. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay una ficha. Si cada ficha se mueve a una casilla adyacente a la suya, ¿para qué valores de n es posible que haya exactamente 3 fichas en cada casilla no vacía del tablero?

Aclaración: dos casillas son adyacentes si ellas comparten un lado.

8. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersecan en el punto O , donde $\angle AOB = 120^\circ$. Se marcan un punto P en el segmento AO y un punto Q en el segmento BO , de modo que $AQ = PD$ y $CQ = PB$. Si $BO + AO + PO + QO = CO + DO$ y $AQ \neq PB$, demuestre que $AD + BC = CQ + DP$.