

CUADRAGÉSIMO SÉPTIMO TORNEO DE LAS CIUDADES

Gira de otoño,

Nivel Mayor: Grados 10 – 11, versión básica, 5 de octubre de 2025.

(El resultado se resume en función de los tres problemas para los que se lograron las mejores puntuaciones; se suman las puntuaciones de las partes individuales de un mismo problema.)

puntos problemas

1. Se nos da una fila de casillas etiquetadas con $1, 2, 3, \dots$ (de izquierda a derecha). Colocamos los números $1, 2, \dots, 2025$ (en este orden) en estas casillas siguiendo estas reglas:

- Cada dos números en la misma casilla deben ser primos entre sí.
- El número 1 debe ir en la casilla 1.
- Cada número siguiente se coloca en la casilla más a la izquierda permitida por la primera regla.

Después de colocar todos los números, contamos cuántos hay en cada casilla.

2 a) ¿Cuántos números hay en la casilla 2?

2 b) ¿Cuántos números hay en la casilla 3?

- 4 2. En un pentágono convexo $ABCDE$, los lados AE , BC y DE son iguales; los ángulos A , B , C y D también son todos iguales. Demuestre que los puntos A , B , C , D y E se encuentran en la misma circunferencia.

- 5 3. 30 niños y 30 niñas están parados formando un círculo. Demuestre que es posible elegir 10 niños y 10 niñas de tal manera que ninguna de las personas elegidas esté parada a lado de otra persona elegida.

- 5 4. Alicia y Bob están dibujando en la pizarra. Alicia ha dibujado varios círculos con diferentes centros, coloreando cada punto central de rojo o azul. Resulta que si dos de estos círculos son tangentes entre sí, entonces son tangentes externamente y sus centros tienen colores diferentes. ¿Es cierto que Bob siempre puede reemplazar cada círculo por uno diferente con el mismo centro, de modo que se cumpla la siguiente condición: si dos círculos antiguos eran tangentes entre sí, entonces los nuevos círculos correspondientes también son tangentes, pero ahora son tangentes internamente?

5. Cada casilla de un tablero de $n \times n$ se llena con un entero del 0 al n , de modo que en cada fila y en cada columna todos los números son diferentes. Se dice que una casilla del tablero es *afortunada* si la unión de su fila y de su columna contiene todos los números del 0 al n .

3 a) ¿Cuál es la mayor cantidad posible de casillas afortunadas?

3 b) Demuestre que la cantidad de casillas afortunadas es par.