XXI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática - Aceros Arequipa

ONEM-AA 2025

Etapa Nacional - Nivel 3

22 de octubre de 2025

---

1. En cada una de las nueve casillas de un tablero de 3×3 escribimos un entero positivo, sin repetir, de tal forma que la suma de cualesquiera dos números ubicados en casillas que tienen un lado en común es un número primo. Encuentre el menor valor que puede tomar la suma de los nueve números escritos.

2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ se escribe un entero positivo, de tal manera que los n^2 números son distintos. Cada número que no está en la columna de la izquierda divide al número que está a su izquierda. Cada número que no está en la fila superior divide al número que está arriba. ¿Cuál es el menor valor posible del número que va en la esquina superior izquierda?

3. Determine todas las soluciones (x, y, z) del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{y}{z} = 3 - 2x, \quad \frac{z}{x} = 3 - 2y, \quad \frac{x}{y} = 3 - 2z,$$

   considerando que z, y y z son números reales no nulos y, además, xyz es un número entero.

4. Sean D, E y F puntos de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, respectivamente, tales que AD, BE y CF son concurrentes. Las prolongaciones de AC por C y FD por D se cortan en el punto X, de tal modo que $\angle ABE = \angle EBC + \angle DXC$. Una circunferencia de centro O pasa por los puntos B, E y X e interseca a las prolongaciones de AB por B y BC por C en los puntos P y Q, respectivamente. Sea M el punto de intersección de las rectas DF y PQ.

   a) Demuestre que $PM = MQ$.

   b) Demuestre que la circunferencia circunscrita del triángulo BOP, la circunferencia circunscrita del triángulo EMX y la circunferencia de diámetro AC tienen un punto en común.