



XXI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA ONEM-AA 2025

Etapla Nacional - Nivel 2

22 de octubre de 2025

1. Se tiene un tablero de 6×6 . En algunas de las casillas se coloca una ficha de tal forma que cada rectángulo de 1×2 o de 2×1 contiene al menos una ficha y cada rectángulo de 1×4 o de 4×1 contiene al menos dos fichas en casillas vecinas.

- a) Demuestre que cada fila del tablero contiene al menos 4 fichas.
b) Muestre un ejemplo donde la cantidad total de fichas es 24.

Aclaración: dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

2. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ dos sucesiones infinitas de números reales positivos tales que

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 3b_n - 2a_n, \\ b_{n+1} &= 3a_n - 2b_n,\end{aligned}$$

para todo número entero $n \geq 1$. Demuestre que $a_1 = b_1$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$. Sean E y F puntos de los lados BC y AD , respectivamente, y sea P el punto de intersección de los segmentos DE y CF . Resulta que la circunferencia de diámetro AB es tangente a los segmentos BE , EP , PF y FA . Sea Q el pie de la perpendicular trazada desde P hacia AB . Suponga que el segmento EF interseca al segmento PQ en su punto medio.

- a) Demuestre que $BC + AD = 3(BE + AF)$.
b) Demuestre que $\angle CPD \geq 120^\circ$.

4. Para cada entero positivo n , el n -ésimo número *triangular* es $t_n = 1 + 2 + \cdots + n$ y el n -ésimo número *tetraédrico* es $T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$. Por ejemplo, $t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ es el tercer número triangular y $T_3 = t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 3 + 6 = 10$ es el tercer número tetraédrico.
- a) Si un número triangular de 2 o más dígitos tiene todos sus dígitos iguales a k , determine todos los posibles valores de k .
- b) Pruebe que existe un número tetraédrico de 100 o más dígitos tal que al menos el $2/3$ de sus dígitos sean iguales y distintos de 0.