CUADRAGÉSIMO SEXTO TORNEO DE LAS CIUDADES

Gira de primavera,

Nivel Mayor: Grados 10 – 11, versión avanzada, 16 de marzo de 2025.

(El resultado se resume en función de los tres problemas para los que se lograron las mejores puntuaciones.)

---

puntos problemas

5

1. ¿Existe un número positivo $x > 1$ tal que

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \cdots > \{x^{100}\}?$$

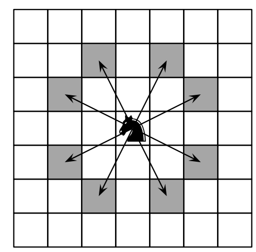
(Aquí $\{x\}$ es la parte fraccionaria de x, es decir, la diferencia entre x y el mayor entero que no excede a x).

6

2. Dadas dos pirámides triangulares con base común ABC. Sus vértices S y R están en lados diferentes del plano ABC. Se observa que las aristas SA, SB y SC de la primera pirámide son paralelas a las caras BCR, ACR y ABR, respectivamente, de la segunda pirámide. Demuestre que el volumen de una de las pirámides es igual al doble del volumen de la otra.

7

3. ¿Es posible colocar una cantidad infinita de caballos de ajedrez en el plano cuadriculado infinito (no más de un caballo por casilla) de modo que cada caballo amenace a exactamente otros 5? (Recordemos que un caballo de ajedrez amenaza a 8 casillas como se muestra en la imagen).

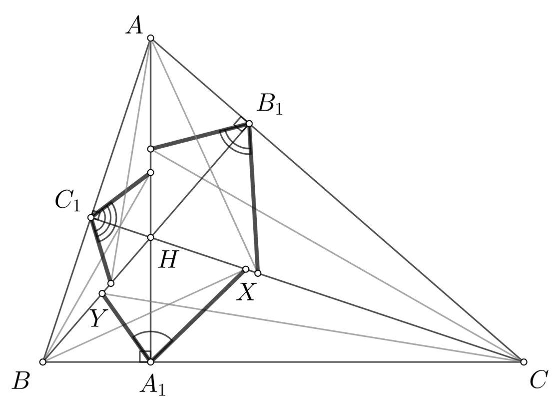


8

4. La moneda de un país es el tugrik, y solo circulan billetes de dos denominaciones enteras. Tanto el vendedor como el comprador de una cantidad suficiente de ambos tipos de billetes, pero en cada pago deben no pueden utilizar más de k billetes en conjunto (incluyendo el vuelto si lo hubiera). Se sabe que de esta manera es posible realizar un pago por cualquier cantidad entera desde 1 hasta n tugriks. ¿Cuál es el máximo n posible (dependiendo de k)?

10

5. Las alturas AA_1, BB_1 y CC_1 de un triángulo acutángulo ABC se intersecan en el punto H. Las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo BHC cortan a los segmentos CH y BH en los puntos X y Y, respectivamente. Denote el valor del ángulo XA_1Y con α. Define β y γ de forma similar. Halle la suma $\alpha + \beta + \gamma$.



10

6. El Barón de Munchausen afirma que existe un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros y enteros positivos m y n tales que se cumple la siguiente propiedad: $f(m)$ no es un múltiplo de n, pero $f(p^k)$ es un múltiplo de n para cada primo p y para cada entero positivo k. ¿Se equivoca el Barón?

12

7. Alicia pinta cada casilla de un tablero de $2m \times 2n$ de negro o blanco, de modo que las casillas de cada color formen un polígono. Luego, Bob divide el tablero en fichas de dominó (rectángulos de dos casillas). Alicia se esfuerza por conseguir la mayor cantidad posible de fichas de dominó de dos colores y Bob se esfuerza por conseguir la menor cantidad posible. ¿Cuál es la mayor cantidad de fichas de dominó de dos colores que Alicia puede garantizar, sin importar cómo actúe Bob? (Recuerde que el contorno de un polígono es una línea discontinua cerrada sin autointersecciones).