

---

# Problemas de la Olimpiada de Mayo

(Nivel 2)

1995 - 2025

---

Juan Neyra Faustino

Agosto 2025



## I Olimpiada (1995)

- 2.1** Verónica, Ana y Gabriela situadas en una ronda se divierten con el siguiente juego: una de ellas elige un número y lo dice en voz alta; la que está a su izquierda lo divide entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta; la que está a su izquierda divide este último número entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta y así sucesivamente. Ganará aquella que deba decir en voz alta el número 1, momento en el que el juego finaliza. Ana eligió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó. Verónica eligió el siguiente del que eligió Ana y Verónica también ganó. Dar todos los números que pudo decir Ana.
- 2.2** El dueño de la ferretería “El tornillo flojo” compró una partida de tornillos en cajas cerradas y los vende sueltos; nunca tiene más de una caja abierta. Al finalizar el lunes quedan 2208 tornillos tipo “A”, al finalizar el martes tiene todavía 1616 tornillos tipo “A” y al finalizar el miércoles tiene 973 tornillos tipo “A”. Para controlar a los empleados, todas las noches anota la cantidad de tornillos que hay en la única caja abierta. La cantidad que anotó el martes es el triple de la que anotó el lunes y la cantidad que anotó el miércoles es el doble de la del lunes. ¿Cuántos tornillos trae cada caja cerrada si se sabe que son menos de 500?
- 2.3** Se considera un número de tres cifras distintas, ninguna de ellas cero. Intercambiando dos de sus cifras de lugar, se obtiene un segundo número menor que el primero. Si la diferencia entre el segundo y el primero es un número de dos cifras y la suma del primero y el segundo es un número capicúa menor que 500, ¿cuáles son los posibles capicúas que se obtienen?
- 2.4** Se considera una pirámide cuya base es un triángulo equilátero  $BCD$  y sus caras son triángulos isósceles rectángulos en el vértice común  $A$ . Una hormiga sale del vértice  $B$  y llega al punto  $P$  de la arista  $CD$ , desde allí se dirige a un punto  $Q$  de la arista  $AC$  para retornar al punto  $B$ . Si el camino que realizó es mínimo, ¿cuánto mide el ángulo  $PQA$ ?
- 2.5** Tenemos 105 monedas, entre las cuales sabemos que hay tres falsas. Las monedas auténticas pesan todas lo mismo y su peso es mayor que el de las falsas, que también pesan todas lo mismo. Indicar de qué manera se pueden seleccionar 26 monedas auténticas realizando solo dos pesadas en una balanza de dos platos.

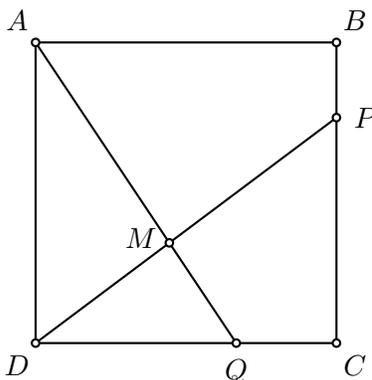
## II Olimpiada (1996)

- 2.1** En un rectángulo  $ABCD$ ,  $AC$  es una diagonal. Una recta  $r$  se mueve paralelamente a  $AB$ , formando dos triángulos opuestos por el vértice, interiores al rectángulo. Prueba que la suma de las áreas de dichos triángulos es mínima cuando  $r$  pasa por el punto medio del segmento  $AD$ .
- 2.2** Uniendo  $15^3 = 3375$  cubitos de  $1 \text{ cm}^3$  se pueden construir cuerpos de  $3375 \text{ cm}^3$  de volumen. Indica cómo se construyen dos cuerpos  $A$  y  $B$  con  $3375$  cubitos cada uno y tales que la superficie lateral de  $B$  sea 10 veces la superficie lateral de  $A$ .
- 2.3** Natalia y Marcela cuentan de 1 en 1 empezando juntas en 1, pero la velocidad de Marcela es el triple que la de Natalia (cuando Natalia dice su segundo número, Marcela dice el cuarto número). Cuando la diferencia de los números que dicen al unísono es alguno de los múltiplos de 29, entre 500 y 600, Natalia sigue contando normalmente y Marcela empieza a contar en forma descendente de tal forma que, en un momento, las dos dicen al unísono el mismo número. ¿Cuál es dicho número?
- 2.4** Sea  $ABCD$  un cuadrado y  $F$  un punto cualquiera del lado  $BC$ ; se traza por  $B$  la perpendicular a la recta  $DF$  que corta a la recta  $DC$  en  $Q$ . ¿Cuánto mide el ángulo  $FQC$ ?
- 2.5** Se tiene una cuadrícula de  $10 \times 10$ . Un “movimiento” en la cuadrícula consiste en avanzar 7 cuadrados a la derecha y 3 cuadrados hacia abajo. En caso de salirse por un renglón se continúa por el principio (izquierda) del mismo renglón y en caso de terminarse una columna se continúa por el principio de la misma columna (arriba). ¿Dónde se debe empezar para que después de 1996 movimientos terminemos en una esquina?

### III Olimpiada (1997)

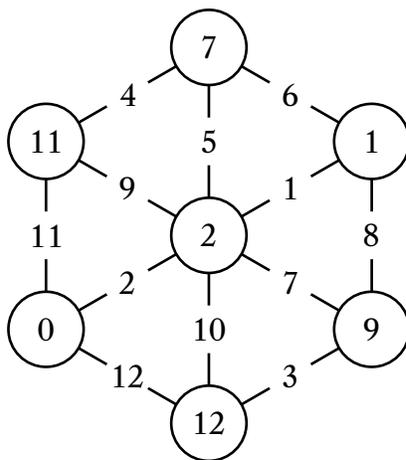
2.1 ¿Cuántos números de siete dígitos son múltiplos de 388 y terminan en 388?

2.2 En un cuadrado  $ABCD$  de lado  $k$ , se ubican los puntos  $P$  y  $Q$  sobre los lados  $BC$  y  $CD$  respectivamente, de tal manera que  $PC = 3PB$  y  $QD = 2QC$ . Si se llama  $M$  al punto de intersección de  $AQ$  y  $PD$ , determinar el área del triángulo  $QMD$  en función de  $k$ .

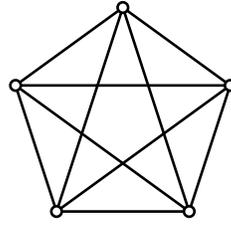
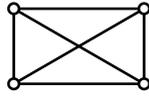


2.3 Se tienen 10000 fichas iguales con forma de triángulo equilátero. Con estos triángulitos se forman hexágonos regulares, sin superposiciones ni huecos. Si se forma el hexágono regular que desperdicia la menor cantidad posible de triángulitos, ¿cuántos triángulitos sobran?

2.4 En las figuras, se señalan los vértices con un círculo. Se llaman caminos a los segmentos que unen vértices. Se distribuyen números enteros no negativos en los vértices y, en los caminos, las diferencias entre los números de sus extremos. Diremos que una distribución de números es *garbosa* si aparecen en los caminos todos los números de 1 a  $n$ , donde  $n$  es el número de caminos. El siguiente es un ejemplo de distribución garbosa:



Dar - si es posible - una distribución garbosa para las siguientes figuras. En caso de no poder hacerlo, mostrar por qué.



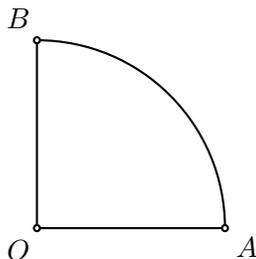
**2.5** ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden?

## IV Olimpiada (1998)

- 2.1** Inés eligió cuatro dígitos distintos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Formó con ellos todos los posibles números de cuatro cifras distintas y sumó todos esos números de cuatro cifras. El resultado es 193314. Halla los cuatro dígitos que eligió Inés.
- 2.2**  $ABC$  es un triángulo equilátero.  $N$  es un punto del lado  $AC$  tal que  $AC = 7AN$ ,  $M$  es un punto del lado  $AB$  tal que  $MN$  es paralelo a  $BC$  y  $P$  es un punto del lado  $BC$  tal que  $MP$  es paralelo a  $AC$ . Hallar la fracción  $\frac{\text{área}(MNP)}{\text{área}(ABC)}$ .
- 2.3** Dado un tablero cuadrículado de  $4 \times 4$  con cada casilla pintada de un color distinto, se desea cortarlo en dos pedazos de igual área mediante un solo corte que siga las líneas de la cuadrícula. ¿De cuántas maneras se puede hacer?
- 2.4** En el piso del patio hay dibujado un octógono regular. Emiliano escribe en los vértices los números del 1 al 8 en cualquier orden. Pone una piedra en el punto 1. Camina hacia el punto 2, habiendo recorrido  $\frac{1}{2}$  del camino se detiene y deja la segunda piedra. Desde allí camina hacia el punto 3, habiendo recorrido  $\frac{1}{3}$  del camino se detiene y deja la tercera piedra. Desde allí camina hacia el punto 4, habiendo recorrido  $\frac{1}{4}$  del camino se detiene y deja la cuarta piedra. Así sigue hasta que, después de dejar la séptima piedra, camina hacia el punto 8 y habiendo recorrido  $\frac{1}{8}$  del camino deja la octava piedra.
- La cantidad de piedras que quedan en el centro del octógono depende del orden en que escribió los números en los vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad de piedras que pueden quedar en dicho centro?
- 2.5** En el planeta X31 hay sólo dos tipos de billetes, sin embargo el sistema no es tan malo porque hay solamente quince precios enteros que no se pueden pagar exactamente (se paga de más y se recibe cambio). Si 18 es uno de esos precios que no se pueden pagar exactamente, halla el valor de cada tipo de billete.

## V Olimpiada (1999)

- 2.1** Un número natural de tres cifras se llama *tricúbico* si es igual a la suma de los cubos de sus dígitos. Hallar todas las parejas de números consecutivos tales que ambos sean tricúbicos.
- 2.2** La figura representa la cuarta parte de un círculo de radio 1.



En el arco  $AB$  se consideran dos puntos  $P$  y  $Q$  de forma tal que la recta  $PQ$  es paralela a la recta  $AB$ . Sean  $X$  e  $Y$  los puntos de intersección de la recta  $PQ$  con las rectas  $OA$  y  $OB$  respectivamente. Calcular  $PX^2 + PY^2$ .

**2.3**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

La primera fila de esta tabla se completa con los números del 1 al 10, en ese orden. La segunda fila se completa con los números del 1 al 10 en cualquier orden. En cada casilla de la tercera fila se escribe la suma de los dos números escritos arriba. ¿Hay alguna forma de completar la segunda fila de modo que las cifras de las unidades de los números de la tercera fila sean todas distintas?

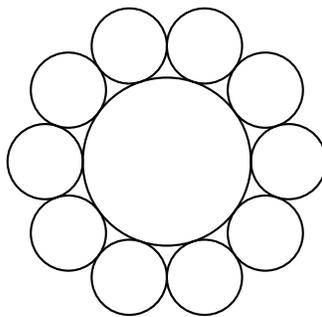
- 2.4** Sea  $ABC$  un triángulo equilátero.  $M$  es el punto medio del segmento  $AB$  y  $N$  es el punto medio del segmento  $BC$ . Sea  $P$  el punto exterior a  $ABC$  tal que el triángulo  $ACP$  es isósceles rectángulo en  $P$ .  $PM$  y  $AN$  se cortan en  $I$ . Probar que  $CI$  es la bisectriz del ángulo  $MCA$ .
- 2.5** Se tienen 12 puntos que son vértices de un polígono regular de 12 lados. Rafael debe trazar segmentos que tengan sus dos extremos en dos de los puntos dibujados. Tiene permitido que cada punto sea extremo de más de un segmento y que los segmentos se crucen, pero tiene prohibido trazar tres segmentos que sean los tres lados de un triángulo en el que cada vértice es uno de los 12 puntos iniciales. Hallar el máximo número de segmentos que puede trazar Rafael y justificar por qué no puede trazar un número mayor de segmentos.

## VI Olimpiada (2000)

- 2.1** El conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  puede ser partido en dos subconjuntos  $A = \{1, 4\}$  y  $B = \{3, 2\}$  sin elementos comunes y tales que la suma de los elementos de  $A$  es igual a la suma de los elementos de  $B$ . Una tal partición es imposible para el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y también para el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Determinar todos los valores de  $n$  para los que el conjunto de los primeros  $n$  números naturales puede ser partido en dos subconjuntos sin elementos comunes tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma.
- 2.2** En un paralelogramo de área 1 se trazan las rectas que unen cada vértice con el punto medio de cada lado no adyacente a él. Las ocho rectas trazadas determinan un octógono en el interior del paralelogramo. Calcular el área de dicho octógono.
- 2.3** Sean  $S$  una circunferencia de radio 2;  $S_1$  una circunferencia de radio 1 tangente interiormente a  $S$  en  $B$  y  $S_2$  una circunferencia de radio 1 tangente a  $S_1$  en el punto  $A$  pero que no es tangente a  $S$ . Si  $K$  es el punto de intersección de la recta  $AB$  con la circunferencia  $S$ , demostrar que  $K$  pertenece a la circunferencia  $S_2$ .
- 2.4** Se tiene un cubo de  $3 \times 3 \times 3$  formado por la unión de 27 cubitos de  $1 \times 1 \times 1$ . Se retiran algunos cubitos de tal modo que los que permanecen siguen formando un sólido constituido por cubitos que están unidos por lo menos por una cara al resto del sólido. Cuando se retira un cubito los que permanecen lo hacen en el mismo lugar en que estaban. ¿Cuál es el máximo número de cubitos que se pueden retirar de modo que el área del sólido que resulta sea igual al área del cubo original?
- 2.5** Un rectángulo se puede dividir en  $n$  cuadrados iguales y también se puede dividir en  $n + 98$  cuadrados iguales. Si el área del rectángulo es  $n$ , con  $n$  entero, hallar los lados del rectángulo. Dar todas las posibilidades.

## VII Olimpiada (2001)

- 2.1** En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible entre 11 y que deja resto 3 al dividirlo entre 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta? ¿Cuál es el número que apareció en la pantalla?
- 2.2** En el trapecio  $ABCD$ , el lado  $DA$  es perpendicular a las bases  $AB$  y  $CD$ . La base  $AB$  mide 45, la base  $CD$  mide 20 y el lado  $BC$  mide 65. Sea  $P$  en el lado  $BC$  tal que  $BP$  mide 45 y sea  $M$  el punto medio de  $DA$ . Calcula la medida del segmento  $PM$ .
- 2.3** En un tablero de 3 filas y 555 columnas, se colorean de rojo 3 casillas, una en cada una de las 3 filas. Si se escriben en las casillas, ordenadamente por filas, de izquierda a derecha, los números del 1 al 1665 (en la primera fila del 1 al 555, en la segunda del 556 al 1110 y en la tercera del 1111 al 1665) hay 3 números que quedan escritos en casillas rojas. Si se escriben en las casillas, ordenadamente por columnas, de arriba hacia abajo, los números del 1 al 1665 (en la primera columna del 1 al 3, en la segunda del 4 al 6, en la tercera del 7 al 9, ..., y en la última del 1663 al 1665) hay 3 números que quedan escritos en casillas rojas. Llamamos números rojos a los que en alguna de las dos distribuciones quedan escritos en casillas rojas. Indica cuáles son las 3 casillas que hay que colorear de rojo para que sólo haya 3 números rojos. Muestra todas las posibilidades.
- 2.4** Alrededor de un círculo se ubican diez monedas de 1 cm de radio como se indica en la figura. Cada moneda es tangente al círculo y a sus dos monedas vecinas.



Demuestra que la suma de las áreas de las diez monedas es el doble del área del círculo.

- 2.5** En el pizarrón están escritos los números naturales desde 1 hasta 2001 inclusive. Hay que borrar algunos números de modo que entre los que quedan sin borrar sea imposible elegir dos números distintos tales que el resultado de su multiplicación sea igual a alguno de los números que quedan sin borrar. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que se deben borrar? Para dicha cantidad, dar un ejemplo que muestre qué números se borran. Justificar por qué, si se borran menos números, no se tiene la propiedad deseada.

## VIII Olimpiada (2002)

- 2.1** Utilizando cubitos blancos de lado 1 se armó un prisma (sin huecos). Se pintaron de negro las caras del prisma. Se sabe que los cubitos que quedaron con exactamente 4 caras blancas son 20 en total. Determina cuáles pueden ser las dimensiones del prisma. Da todas las posibilidades.
- 2.2** Sea  $k$  un número entero positivo fijo,  $k \leq 10$ . Dada una lista de diez números, la operación permitida es: elegir  $k$  números de la lista, y sumarle 1 a cada uno de ellos. Se obtiene así una nueva lista de diez números. Si inicialmente se tiene la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, determina los valores de  $k$  para los que es posible, mediante una secuencia de operaciones permitidas, obtener una lista que tenga los diez números iguales. En cada caso indica la secuencia.
- 2.3** En un triángulo  $ABC$ , rectángulo en  $A$  e isósceles, sea  $D$  un punto del lado  $AC$  ( $D \neq A$  y  $D \neq C$ ) y sea  $E$  el punto de la prolongación del lado  $BA$  tal que el triángulo  $ADE$  es isósceles. Si  $P$  es el punto medio del segmento  $BD$ ,  $R$  es el punto medio del segmento  $CE$  y  $Q$  el punto en donde se cortan las rectas  $ED$  y  $BC$ , demuestra que el cuadrilátero  $ARQP$  es un cuadrado.
- 2.4** Los vértices de un polígono regular de 2002 lados están numerados del 1 al 2002, en sentido horario. Dado un entero  $n$ ,  $1 \leq n \leq 2002$ , se colorea de azul el vértice  $n$ , luego, siguiendo el sentido horario, se cuentan  $n$  vértices comenzando en el siguiente de  $n$ , y se colorea de azul el número  $n$ . Y así sucesivamente, a partir del vértice que sigue al último vértice que se ha coloreado, se cuentan  $n$  vértices, coloreados o sin colorear, y al número  $n$  se lo colorea de azul. Cuando el vértice que toca colorear ya es azul, el proceso se detiene. Denotamos  $P(n)$  al conjunto de vértices azules que se obtienen con este procedimiento cuando se comienza por el vértice  $n$ . Por ejemplo,  $P(364)$  está formado por los vértices 364, 728, 1092, 1456, 1820, 182, 546, 910, 1274, 1638 y 2002. Determina todos los enteros  $n$ ,  $1 \leq n \leq 2002$ , tales que  $P(n)$  tiene exactamente 14 vértices.
- 2.5** Dados  $x$  e  $y$  enteros positivos, consideramos una cuadrícula de  $x \times y$ , que tiene coloreados de rojo los  $(x+1) \cdot (y+1)$  puntos que son vértices de cuadraditos. Inicialmente hay una hormiga en cada uno de los puntos rojos. En un instante dado, todas las hormigas comienzan a caminar por las líneas de la cuadrícula, y todas lo hacen con la misma velocidad. Cada vez que llegan a un punto rojo, giran  $90^\circ$  en alguna dirección. Determina todos los valores de  $x$  e  $y$  para los cuales es posible que las hormigas continúen moviéndose indefinidamente de manera que en ningún momento haya dos o más hormigas en un mismo punto rojo. (No interesan las posibles coincidencias en puntos de las líneas de la cuadrícula que no son rojos.)

## IX Olimpiada (2003)

- 2.1** Se eligen cuatro dígitos  $a, b, c, d$  distintos entre sí y distintos de cero y se escribe la lista de todos los números de cuatro cifras que se obtienen intercambiando de lugar los dígitos  $a, b, c, d$ . ¿Qué dígitos hay que elegir para que la lista tenga la mayor cantidad posible de números de cuatro cifras que sean múltiplos de 36?
- 2.2** Sea  $ABCD$  un rectángulo de lados  $AB = 4$  y  $BC = 3$ . La perpendicular a la diagonal  $BD$  trazada por  $A$  corta a  $BD$  en el punto  $H$ . Denotamos  $M$  al punto medio de  $BH$  y  $N$  al punto medio de  $CD$ . Calcula la medida del segmento  $MN$ .
- 2.3** Halla todos los pares de números enteros positivos  $(a, b)$  tales que  $8b + 1$  es múltiplo de  $a$  y  $8a + 1$  es múltiplo de  $b$ .
- 2.4** Beto marcó 2003 puntos verdes en el plano, de manera que todos los triángulos con sus tres vértices verdes tienen área menor que 1. Demuestra que los 2003 puntos verdes están contenidos en un triángulo  $T$  de área menor que 4.
- 2.5** Una hormiga que está en una arista de un cubo de lado 8, debe realizar un recorrido por la superficie del cubo y regresar al punto de partida. Su camino debe contener puntos interiores de las seis caras del cubo y debe visitar sólo una vez cada cara del cubo. Halla la longitud del camino más corto que puede realizar la hormiga y justifica por qué es el camino más corto.

## X Olimpiada (2004)

**2.1** Julián escribe cinco números enteros positivos, no necesariamente distintos, tales que su producto sea igual a su suma. ¿Cuáles pueden ser los números que escribe Julián?

**2.2** La mamá de Pepito quiere preparar  $n$  paquetes de 3 caramelos para regalar en la fiesta de cumpleaños, y para ello comprará caramelos surtidos de 3 sabores distintos. Puede comprar cualquier número de caramelos pero no puede elegir cuántos son de cada gusto. Ella quiere poner en cada paquete un caramelo de cada sabor, y si esto no es posible usará sólo caramelos de un sabor y todos los paquetes tendrán 3 caramelos de ese sabor. Determina el menor número de caramelos que debe comprar para poder armar los  $n$  paquetes. Explica por qué si compra menos caramelos no tiene la certeza de poder armar los paquetes como quiere.

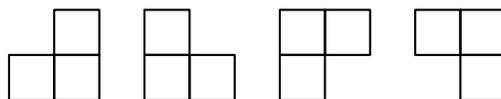
**2.3** Disponemos de una mesa de billar de 8 metros de largo y 2 metros de ancho, con una única bola en su centro. La lanzamos en línea recta y, tras recorrer 29 metros, se detiene en una esquina de la mesa. ¿Cuántas veces ha rebotado la bola contra los bordes de la mesa?

*Aclaración:* cuando la bola rebota contra un borde de la mesa los dos ángulos que forma su trayectoria con el borde de la mesa son iguales.

**2.4** Halla todos los números naturales  $x, y, z$  que verifican simultáneamente

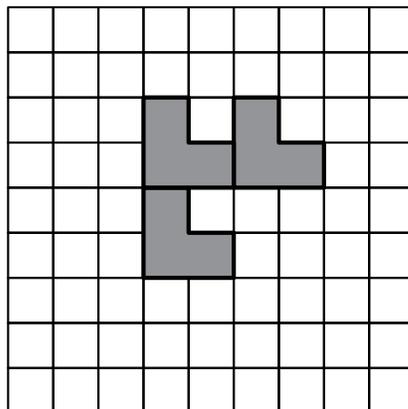
$$x \cdot y \cdot z = 4104, \quad x + y + z = 77.$$

**2.5** Sobre un tablero de  $9 \times 9$ , dividido en casillas de  $1 \times 1$ , se colocan, sin superposiciones y sin sobresalirse del tablero, piezas de la forma



Cada pieza cubre exactamente 3 casillas.

- (a) A partir del tablero vacío, ¿cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?
- (b) A partir del tablero con 3 piezas ya colocadas como muestra el diagrama siguiente,



¿cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?

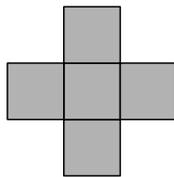
## XI Olimpiada (2005)

- 2.1** Determina el menor número de tres cifras que sea el producto de dos números de dos cifras, de modo que las siete cifras de estos tres números sean todas diferentes.
- 2.2** Gonzalo escribe en el pizarrón cuatro números elegidos entre 0, 1, 2, 3 ó 4. Puede repetir números. Nicolás realiza repetidas veces la siguiente operación: cambia uno de los números, a su elección, por el resto de dividir entre 5 el producto de otros dos números del pizarrón, a su elección. El objetivo de Nicolás es lograr que los cuatro números sean iguales. Determina si Gonzalo puede elegir los números iniciales de modo que a Nicolás le sea imposible lograr su objetivo.
- 2.3** En el triángulo isósceles  $ABC$ , con  $AB = AC$ , sea  $M$  el punto medio de  $BC$ . El punto  $D$  en el lado  $BC$  es tal que  $\angle BAD = \frac{1}{6}\angle BAC$ . Además la recta perpendicular a  $AD$  por  $C$  corta a  $AD$  en  $N$  de modo que  $DN = DM$ . Calcula los ángulos del triángulo  $ABC$ .
- 2.4** En un baile hay 12 hombres, numerados de 1 a 12, y 12 mujeres, numeradas de 1 a 12. A cada hombre se le asigna además un “amigo secreto” entre los otros 11. Todos bailaron todas las piezas. En la primera pieza cada hombre bailó con la mujer que tiene su mismo número. A partir de allí, cada hombre bailó la nueva pieza con la mujer que había bailado la pieza anterior con su amigo secreto. En la tercera pieza las parejas fueron.

|         |   |    |   |    |   |    |   |   |   |    |    |    |
|---------|---|----|---|----|---|----|---|---|---|----|----|----|
| Hombres | 1 | 2  | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Mujeres | 5 | 11 | 2 | 12 | 8 | 10 | 9 | 4 | 6 | 3  | 7  | 1  |

Halla el número del amigo secreto de cada hombre.

- 2.5** Sobre el tablero de  $9 \times 9$  se ha posado la nave enemiga que cubre exactamente 5 casillas del tablero, así:



La nave es invisible.

Cada misil defensivo cubre exactamente una casilla, y destruye a la nave si impacta en una de las 5 casillas que ésta ocupa.

Determina el mínimo número de misiles que se necesitan para destruir con certeza a la nave enemiga.

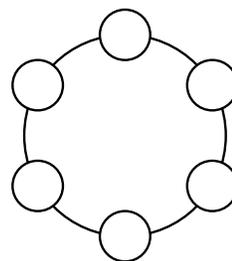
## XII Olimpiada (2006)

**2.1** Determinar todas las parejas de números naturales  $a$  y  $b$  tales que  $\frac{a+1}{b}$  y  $\frac{b+1}{a}$  son números naturales.

**2.2** En el pizarrón están escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro sumó los números del pizarrón y Fernando multiplicó los números del pizarrón. El resultado que obtuvo Fernando es igual a 40 veces el resultado que obtuvo Mauro. Determinar cuáles pueden ser los números del pizarrón. Dar todas las posibilidades.

**2.3** Escribir un número entero positivo en cada casilla de modo que:

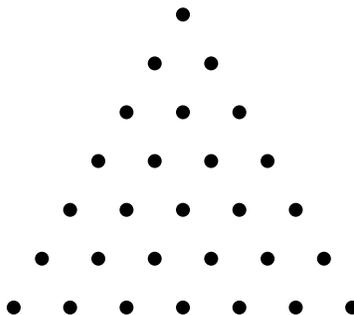
- Los seis números sean distintos.
- La suma de los seis números sea 100.
- Si se multiplica cada número por su vecino (en el sentido de las agujas del reloj) y se suman los seis resultados de esas seis multiplicaciones, se obtenga el menor valor posible.



Explicar por qué no se puede obtener un valor menor.

**2.4** Sea  $ABCD$  un trapecio de bases  $AB$  y  $CD$ . Sea  $O$  el punto de intersección de sus diagonales  $AC$  y  $BD$ . Si el área del triángulo  $ABC$  es 150 y el área del triángulo  $ACD$  es 120, calcular el área del triángulo  $BCO$ .

**2.5** Con 28 puntos se forma una “rejilla triangular” de lados iguales, como se muestra en la figura.



Una operación consiste en elegir tres puntos que sean los vértices de un triángulo equilátero y retirar estos tres puntos de la rejilla. Si luego de realizar varias de estas operaciones queda solamente un punto, ¿en qué posiciones puede quedar dicho punto? Dar todas las posibilidades e indicar en cada caso las operaciones realizadas. Justificar por qué el punto que queda no puede estar en otra posición.

## XIII Olimpiada (2007)

- 2.1** Determinar el mayor número natural que tiene todas sus cifras distintas y es múltiplo de 5, de 8 y de 11.
- 2.2** Sea  $n > 2$  un entero par. En las casillas de un tablero de  $n \times n$  se deben colocar fichas de modo que en cada columna la cantidad de fichas sea par y distinta de cero, y en cada fila la cantidad de fichas sea impar. Determinar la menor cantidad de fichas que hay que colocar en el tablero para cumplir esta regla. Mostrar una configuración con esa cantidad de fichas y explicar porqué con menos fichas no se puede cumplir la regla.
- 2.3** Ocho niños, todos de distintas estaturas, deben formar una fila ordenada de menor a mayor. Diremos que la fila tiene exactamente un error si hay un niño que está inmediatamente detrás de otro más alto que él, y todos los demás (salvo el primero de la fila) están inmediatamente detrás de uno más bajo. ¿De cuántas maneras los ocho niños pueden formar una fila con exactamente un error?
- 2.4** Alex y Bruno escriben, entre los dos, un número natural de 6 dígitos distintos. Cada uno, en su turno, escribe un dígito a la derecha del último dígito que escribió el otro. Empieza Alex con el primer dígito de la izquierda y termina Bruno con el último dígito de la derecha. (Está prohibido escribir un dígito que ya se usó.) Bruno gana si el número de 6 dígitos es primo. En caso contrario, gana Alex. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cómo debe hacer para ganar sin importar lo bien que juegue el otro.
- 2.5** En un triángulo  $ABC$ ,  $\angle A = 2\angle C$  y  $2\angle B = \angle A + \angle C$ . La bisectriz del ángulo  $\angle C$  corta al lado  $AB$  en  $E$ , y  $F$  es el punto medio del segmento  $AE$ . La altura correspondiente al lado  $BC$  es  $AD$ . La mediatriz del segmento  $DF$  corta al lado  $AC$  en  $M$ . Demostrar que  $AM = CM$ .

## XIV Olimpiada (2008)

2.1 En el pizarrón está escrita la siguiente expresión:

$$1 - 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - 2^8 - 2^9 - 2^{10}.$$

Juan intercala paréntesis de distintas maneras y efectúa el cálculo que queda. Por ejemplo así

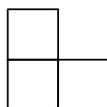
$$1 - 2 - (2^2 - 2^3) - 2^4 - (2^5 - 2^6 - 2^7) - 2^8 - (2^9 - 2^{10}) = 243$$

o así

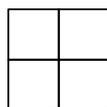
$$1 - (2 - 2^2 - (2^3 - 2^4) - (2^5 - 2^6 - 2^7)) - (2^8 - 2^9) - 2^{10} = -933.$$

¿Cuántos resultados diferentes puede obtener Juan?

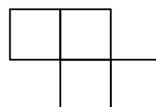
- 2.2 En el rectángulo  $ABCD$  de lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , sea  $P$  un punto del lado  $AD$  tal que  $\angle BPC = 90^\circ$ . La perpendicular a  $BP$  trazada por  $A$  corta a  $BP$  en  $M$  y la perpendicular a  $CP$  trazada por  $D$  corta a  $CP$  en  $N$ . Demuestra que el centro del rectángulo está en el segmento  $MN$ .
- 2.3 En los números  $1010 \dots 101$  se alternan unos y ceros; si hay  $n$  unos, hay  $n - 1$  ceros ( $n \geq 2$ ). Determina los valores de  $n$  para los cuales el número  $1010 \dots 101$ , que tiene  $n$  unos, es primo.
- 2.4 En el plano se tienen 16 rectas tales que no hay dos paralelas ni tres concurrentes. Sebastián tiene que colorear los 120 puntos que son intersección de dos de las rectas de modo que en cada recta todos los puntos sean de distinto color. Determina el mínimo número de colores que necesita Sebastián para su tarea. ¿Y si las rectas son 15 (en este caso, los puntos son 105)?
- 2.5 Matías cubrió un tablero cuadrado de  $7 \times 7$ , dividido en casillas de  $1 \times 1$ , con piezas de los siguientes tres tipos



tipo 1



tipo 2



tipo 3

sin huecos ni superposiciones, y sin salirse del tablero. Cada pieza del tipo 1 cubre exactamente 3 casillas y cada pieza del tipo 2 o del tipo 3 cubre exactamente 4 casillas. Determina la cantidad de piezas del tipo 1 que pudo haber usado Matías. (Las piezas se pueden girar y dar vuelta.)

## XV Olimpiada (2009)

**2.1** Inicialmente en el pizarrón está escrito el número 1. En cada paso, se borra el número del pizarrón y se escribe otro, que se obtiene aplicando una cualquiera de las siguientes operaciones:

- Operación A: Multiplicar el número del pizarrón por  $\frac{1}{2}$ .
- Operación B: Restarle al 1 el número del pizarrón.

Por ejemplo, si en el pizarrón está el número  $\frac{3}{8}$  se lo puede reemplazar por  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$  o por  $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ .

Da una secuencia de pasos al cabo de los cuales el número del pizarrón sea  $\frac{2009}{2^{2009}}$ .

**2.2** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo tal que el triángulo  $ABD$  es equilátero y el triángulo  $BCD$  es isósceles, con  $\angle C = 90^\circ$ . Si  $E$  es el punto medio del lado  $AD$ , calcula la medida del ángulo  $\angle CED$ .

**2.3** En la siguiente suma:  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ , si suprimimos los dos primeros signos “+” obtenemos la nueva suma

$$123 + 4 + 5 + 6 = 138.$$

Suprimiendo tres signos “+” podemos obtener

$$1 + 23 + 456 = 480.$$

Consideremos ahora la suma

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13,$$

en la que se van a suprimir algunos signos “+”. ¿Cuáles son los tres menores múltiplos de 100 que podemos obtener de esta forma?

**2.4** Cada casilla de un tablero de  $5 \times 5$  se pinta de rojo o de azul, de tal forma que se cumple la siguiente condición: “Para cualesquiera dos filas y dos columnas, de las 4 casillas que están en sus intersecciones, hay 4, 2 ó 0 pintadas de rojo.” ¿De cuántas formas se puede pintar el tablero?

**2.5** Un solitario se inicia con 25 cartas en fila. Algunas están boca arriba, y otras boca abajo. En cada movimiento se debe elegir una carta que esté boca arriba, retirarla, y dar vuelta las cartas vecinas a la que se retiró (si las hay). El solitario se gana cuando se logra, repitiendo este movimiento, retirar las 25 cartas de la mesa. Si inicialmente hay  $n$  cartas boca arriba, halla todos los valores de  $n$  para los cuales se puede ganar el solitario. Explica cómo se gana, independientemente de la ubicación inicial de las cartas boca arriba, y justifica por qué es imposible ganar para los otros valores de  $n$ . Dos cartas son vecinas cuando una está inmediatamente al lado de otra, a la derecha o a la izquierda.

Por ejemplo: la carta marcada con A tiene dos cartas vecinas y la marcada con B una sola. Después de retirar una carta queda un hueco, de modo que la marcada con C tiene únicamente una carta vecina, y la marcada con D no tiene ninguna.



## XVI Olimpiada (2010)

- 2.1** Determina el menor entero positivo que tiene todos sus dígitos iguales a 4, y es múltiplo de 169.
- 2.2** Consideramos el rectángulo  $ABCD$  y la circunferencia de centro  $D$  y radio  $DA$ , que corta a la prolongación del lado  $AD$  en el punto  $P$ . La recta  $PC$  corta a la circunferencia en el punto  $Q$  y a la prolongación del lado  $AB$  en el punto  $R$ . Demuestra que  $QB = BR$ .
- 2.3** Hallar el mínimo  $k > 2$  para el cual existen  $k$  números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es un cuadrado.
- 2.4** Sea  $n$  un entero tal que  $1 < n < 2010$ . Dado un polígono regular de 2010 lados y  $n$  monedas, debemos colorear los vértices del polígono utilizando  $n$  colores dados, y luego ubicar las  $n$  monedas en  $n$  vértices del polígono. A continuación, cada segundo, todas las monedas se desplazan al vértice vecino, girando en el sentido de las agujas del reloj. Determina los valores de  $n$  para los que es posible hacer la coloración y elegir las posiciones iniciales de las monedas, de manera que en todo momento las  $n$  monedas estén todas en vértices de distinto color.
- 2.5** Se tienen las siguientes piezas: un rectángulo de  $4 \times 1$ , dos rectángulos de  $3 \times 1$ , tres rectángulos de  $2 \times 1$  y cuatro cuadrados de  $1 \times 1$ . Ariel y Bernardo juegan el siguiente juego en un tablero de  $n \times n$ , donde  $n$  es un número que elige Ariel. En cada movida, Bernardo recibe de Ariel una pieza  $R$ . A continuación Bernardo analiza si puede colocar  $R$  en el tablero de modo que no tenga puntos en común con ninguna de las piezas colocadas anteriormente (ni siquiera un vértice común). Si existe una tal ubicación para  $R$ , Bernardo debe elegir una de ellas y ubicar  $R$ . El juego se detiene si es imposible ubicar  $R$  de la manera explicada, y Bernardo gana. Ariel gana sólo si se han colocado las 10 piezas en el tablero.
- (a) Supongamos que Ariel le da las piezas a Bernardo en orden decreciente de tamaño. ¿Cuál es el menor  $n$  que le garantiza a Ariel la victoria?
- (b) Para el  $n$  hallado en (a), si Bernardo recibe las piezas en orden creciente de tamaño, ¿tiene Ariel garantizada la victoria?

*Aclaración:* cada pieza debe cubrir exactamente un número de cuadrados unitarios del tablero igual a su propio tamaño. Los lados de las piezas pueden coincidir con partes del borde del tablero.

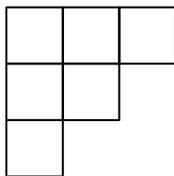
## XVII Olimpiada (2011)

- 2.1** Hallar un número entero positivo  $x$  tal que la suma de los dígitos de  $x$  sea mayor que 2011 veces la suma de los dígitos del número  $3x$  (3 por  $x$ ).
- 2.2** Decimos que un número de cuatro dígitos  $\overline{abcd}$  ( $a \neq 0$ ) es *porá* si se cumplen las siguientes condiciones:

$$a \leq b;$$
$$\overline{ab} - \overline{cd} = \overline{cd} - \overline{ba}.$$

Por ejemplo, 2011 es porá porque  $20 - 11 = 11 - 02$ . Hallar todos los números porá.

- 2.3** En un triángulo rectángulo  $ABC$  tal que  $AB = AC$ ,  $M$  es el punto medio de  $BC$ . Sea  $P$  un punto de la mediatriz de  $AC$  que pertenece al semiplano determinado por  $BC$  que no contiene a  $A$ . Las rectas  $CP$  y  $AM$  se cortan en  $Q$ . Calcular el ángulo que forman  $AP$  y  $BQ$ .
- 2.4** Dados  $n$  puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).
- (a) Si  $n = 101$ , mostrar que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los  $n$  puntos tenga escrito un 0.
- (b) Si  $n = 102$ , demostrar que es imposible lograr todos 0.
- 2.5** Determinar para qué números naturales  $n$  es posible cubrir completamente un tablero de  $n \times n$ , dividido en casillas de  $1 \times 1$ , con piezas como la de la figura, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero.



Cada una de las piezas cubre exactamente seis casillas.

*Aclaración:* las piezas se pueden girar.

## XVIII Olimpiada (2012)

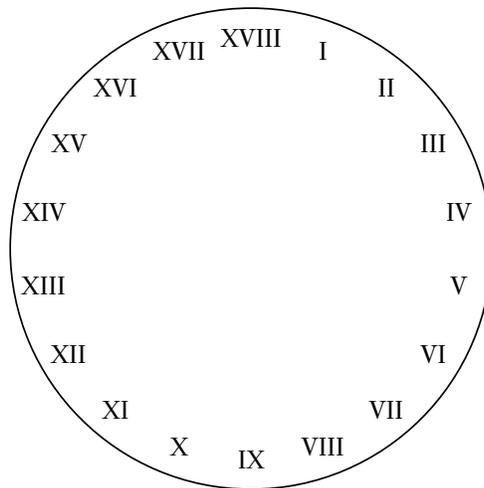
- 2.1** Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.
- 2.2** Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman. Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.
- 2.3** En el triángulo  $ABC$ , se verifica que  $\angle ABC = 2\angle ACB$  y  $\angle BAC > 90^\circ$ . Llamamos  $M$  al punto medio de  $BC$ . La perpendicular por  $C$  al lado  $AC$  corta a la recta  $AB$  en el punto  $D$ . Demostrar que  $\angle AMB = \angle DMC$ .
- 2.4** Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.
- 2.5** Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

## **XIX Olimpiada (2013)**

- 2.1** Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?
- 2.2** Se dispone de un regla sin números y de un trisector que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.
- 2.3** Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta  $r$  no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por  $r$ ? Dar todas las posibilidades.
- 2.4** ¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?
- 2.5** Se tiene 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?

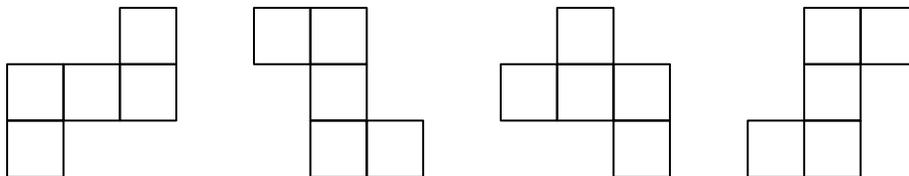
## XX Olimpiada (2014)

- 2.1** El sendero que va del pueblo hasta el refugio en la montaña tienen 76 km. Un grupo de andinistas lo recorrió en 10 días, de manera tal que en dos días consecutivos nunca caminaron más de 16 km, pero en tres días consecutivos siempre caminaron por lo menos 23 km. Determina la máxima cantidad de kilómetros que pudieron haber recorrido en un día.
- 2.2** En un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , sean  $M, N, P$  y  $Q$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$ , respectivamente. Si los segmentos  $MP$  y  $NQ$  dividen a  $ABCD$  en cuatro cuadriláteros con la misma área, demostrar que  $ABCD$  es un paralelogramo.
- 2.3** Ana y Luca juegan al siguiente juego. Ana escribe una lista de  $n$  números enteros distintos. Luca gana si puede elegir cuatro números distintos,  $a, b, c$  y  $d$ , de modo que el número  $a + b - c - d$  sea múltiplo de 20. Determina el mínimo valor de  $n$  para el que, cualquiera que sea la lista de Ana, Luca pueda ganar.
- 2.4** En una excavación en la antigua Roma se encontró un reloj inusual con 18 divisiones marcadas con números romanos (ver figura).



Desgraciadamente el reloj estaba roto en 5 pedazos. La suma de los números en cada pedazo era la misma. Mostrar de qué manera pudo estar roto el reloj.

- 2.5** Cada casilla de un tablero de  $n \times n$ , con  $n \geq 3$ , está coloreado con uno de 8 colores. ¿Para qué valores de  $n$  se puede afirmar que alguna de estas figuras



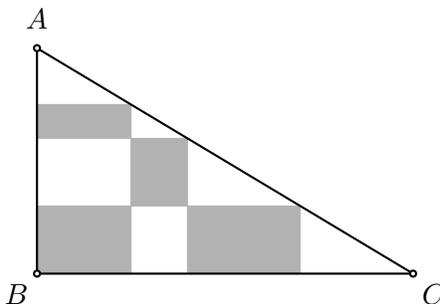
incluida en el tablero, contiene dos casillas del mismo color?

## XXI Olimpiada (2015)

- 2.1** Ana y Celia venden varios objetos y obtienen por cada objeto tantos euros como objetos vendieron. El dinero obtenido está constituido por algunos billetes de 10 euros y menos de 10 monedas de 1 euro. Deciden repartir el dinero del siguiente modo: Ana toma un billete de 10 euros y después Celia, y así sucesivamente hasta que Ana toma el último billete de 10 euros, y Celia se lleva todas las monedas de 1 euro. ¿Cuántos euros más que Celia se llevó Ana? Dar todas las posibilidades.
- 2.2** Se tiene un tablero de  $7 \times 7$ . Se desea pintar algunas de sus casillas de manera tal que cualquier subtablero de  $3 \times 3$  tenga más casillas pintadas que sin pintar. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar? Mostrar una configuración con esa cantidad de casillas pintadas y explicar porqué no es posible con menos.  
*Aclaración:* un subtablero de  $3 \times 3$  es un cuadrado formado por 9 casillas del tablero.
- 2.3** Sea  $ABCDEFGHI$  un polígono regular de 9 lados. Los segmentos  $AE$  y  $DF$  se cortan en  $P$ . Demostrar que  $PG$  y  $AF$  son perpendiculares.
- 2.4** En una pizarra están escritos los primeros 510 enteros positivos:  $1, 2, 3, \dots, 510$ . Una *operación* consiste en borrar dos números cuya suma sea un número primo. ¿Cuál es el máximo número de operaciones seguidas que se puede hacer? Mostrar cómo se logra y explicar porqué no se puede hacer más operaciones.
- 2.5** Se tienen 65 puntos del plano. Se trazan todas las rectas que pasan por dos de ellos y se obtienen exactamente 2015 rectas distintas. Demostrar que al menos cuatro de los puntos están alineados.

## XXII Olimpiada (2016)

- 2.1** Decimos que un número de cuatro cifras  $\overline{abcd}$ , que comienza en  $a$  y termina en  $d$ , es *intercambiable* si existe un entero  $n > 1$  tal que  $n \times \overline{abcd}$  es un número de cuatro cifras que comienza en  $d$  y termina en  $a$ . Por ejemplo, 1009 es intercambiable ya que  $9 \times 1009 = 9081$ . Hallar el mayor número intercambiable.
- 2.2** ¿Cuántas casillas se deben pintar como mínimo en un tablero de  $5 \times 5$  de tal modo que en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de  $2 \times 2$  haya al menos una casilla pintada?
- 2.3** Decimos que un número entero positivo es *cua-divi* si es divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos, y además ninguno de sus dígitos es igual a cero.
- (a) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 24.
- (b) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 1001.
- 2.4** En un triángulo  $ABC$ , sean  $D$  y  $E$  puntos de los lados  $BC$  y  $AC$ , respectivamente. Los segmentos  $AD$  y  $BE$  se cortan en  $O$ . Supongamos que la base media del triángulo, paralela a  $AB$ , divide al segmento  $DE$  por la mitad. Demostrar que el triángulo  $ABO$  y el cuadrilátero  $ODCE$  tienen áreas iguales.
- 2.5** Rosa y Sara juegan con un triángulo  $ABC$ , recto en  $B$ . Rosa comienza marcando dos puntos interiores de la hipotenusa  $AC$ , luego Sara marca un punto interior de la hipotenusa  $AC$  distinto de los de Rosa. Luego, desde estos tres puntos se trazan las perpendiculares a los lados  $AB$  y  $BC$ , formándose la siguiente figura.



Sara gana si el área de la superficie sombreada es igual al área de la superficie no sombreada; en otro caso gana Rosa. Determinar quién de las dos tiene estrategia ganadora.

## XXIII Olimpiada (2017)

- 2.1** Decimos que un número entero positivo es *ascendente* si sus cifras leídas de izquierda a derecha están en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, 458 es ascendente y 2339 no lo es. Hallar el mayor número ascendente que es múltiplo de 56.
- 2.2** Varios números reales diferentes están escritos en el pizarrón. Si  $a, b, c$  son tres de estos números, distintos entre si, al menos una de las sumas  $a + b, b + c, c + a$  también es uno de los números del pizarrón. ¿Cual es la mayor cantidad de números que pueden estar escritos en el pizarrón?
- 2.3** En un cuadrilátero  $ABCD$  se cumple que  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$  y  $BCD$  es obtuso. En el interior del cuadrilátero se ubica el punto  $P$  tal que  $BCDP$  es un paralelogramo. La recta  $AP$  corta al lado  $BC$  en  $M$ . Además  $BM = 2, MC = 5$  y  $CD = 3$ . Determinar la longitud de  $AM$ .
- 2.4** Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7?
- 2.5** Ababa juega con una palabra formada por las letras de su nombre y se ha puesto ciertas reglas:
- Si encuentra una A seguida inmediatamente de una B las puede sustituir por BAA.
  - Si encuentra dos B consecutivas puede borrar.
  - Si encuentra tres A consecutivas las puede borrar.

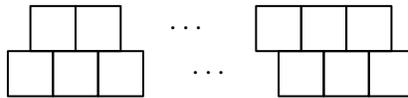
Ababa empieza con la palabra ABABABAABAAB. Con las reglas anteriores, ¿cuántas letras tiene la palabra más corta a la que puede llegar? ¿Por qué no puede llegar a una palabra más corta?

## XXIV Olimpiada (2018)

- 2.1** Se tiene un número entero de 4 dígitos que es un cuadrado perfecto. Se construye otro número sumándole 1 al dígito de las unidades, restándole 1 al dígito de las decenas, sumándole 1 al dígito de las centenas y restándole 1 al dígito de las unidades de mil. Si el número que se obtiene es también un cuadrado perfecto, hallar el número original. ¿Es único?
- 2.2** En un tablero de  $4 \times 4$  están escritos los números del 1 al 16, uno en cada casilla. Andrés y Pablo eligen cuatro números cada uno. Andrés elige el mayor de cada fila y Pablo, el mayor de cada columna. Un mismo número puede ser elegido por ambos. Luego, se eliminan del tablero todos los números elegidos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener la suma de los números que quedan en el tablero?
- 2.3** Los 2018 residentes de un pueblo están estrictamente divididos en dos clases: caballeros, que siempre dicen la verdad, y mentirosos, que siempre mienten. Cierta día todos los residentes se acomodaron alrededor de una circunferencia y cada uno de ellos anunció en voz alta “Mis dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, son mentirosos”. A continuación uno de los residentes abandonó el pueblo. Los 2017 que quedaron se acomodaron nuevamente en una circunferencia (no necesariamente en el mismo orden que antes) y cada uno de ellos anunció en voz alta “Ninguno de mis vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, es de mi misma clase”. Determinar, si es posible, de qué clase es el residente que abandonó el pueblo, caballero o mentiroso.
- 2.4** En un paralelogramo  $ABCD$ , sea  $M$  el punto del lado  $BC$  tal que  $MC = 2BM$  y sea  $N$  el punto del lado  $CD$  tal que  $NC = 2DN$ . Si la distancia del punto  $B$  a la recta  $AM$  es 3, calcular la distancia del punto  $N$  a la recta  $AM$ .
- 2.5** Cada punto de una circunferencia está coloreado con uno de 10 colores. ¿Es cierto que para cualquier coloración hay 4 puntos del mismo color que son vértices de un cuadrilátero con dos lados paralelos (un trapecio isósceles o un rectángulo)?

## XXV Olimpiada (2019)

- 2.1** Un entero positivo es *piola* si los 9 restos que se obtienen al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 son todos diferentes y distintos de cero. ¿Cuántos enteros piolas hay entre 1 y 100000?
- 2.2** Se tiene un tablero con 2020 casillas en la fila inferior y 2019 en la superior, ubicadas como se muestra en la figura.



En la fila inferior se colocan los números enteros del 1 al 2020 en algún orden. Luego en cada casilla de la fila superior se anota la multiplicación de los dos números que tiene debajo. ¿Cómo se pueden colocar los números en la fila inferior para que la suma de los números de la fila superior sea lo menor posible?

- 2.3** En los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  de un triángulo  $ABC$  se ubican los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  respectivamente, tales que  $BQ = 2QC$ ,  $CR = 2RA$  y  $\angle PRQ = 90^\circ$ . Demostrar que  $\angle APR = \angle RPQ$ .
- 2.4** Encontrar el menor número entero positivo  $N$  de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo  $d$  entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de  $N$  obtenemos un número que es múltiplo de  $d$ .
- 2.5** Consideramos los  $n$  vértices de un polígono regular de  $n$  lados. Se tiene un conjunto de triángulos con vértices en estos  $n$  puntos con la propiedad que para cada triángulo del conjunto, al menos uno de sus lados no es lado de ningún otro triángulo del conjunto. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos que puede tener el conjunto?

## XXVI Olimpiada (2020)

- 2.1** Decimos que un número entero positivo es *súper-impar* si todos sus dígitos son impares. Por ejemplo, 1737 es súper-impar y 3051 no lo es. Hallar un entero positivo par que no se pueda expresar como suma de dos números súper-impares y explicar por qué no es posible expresarlo de esa manera.
- 2.2** (a) Determinar si existen enteros positivos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , no necesariamente distintos, tales que  $a + b + c = 2020$  y  $2^a + 2^b + 2^c$  es un cuadrado perfecto.  
(b) Determinar si existen enteros positivos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , no necesariamente distintos, tales que  $a + b + c = 2020$  y  $3^a + 3^b + 3^c$  es un cuadrado perfecto.
- 2.3** Se tiene una caja con 2020 piedras. Ana y Beto juegan a retirar piedras de la caja, alternadamente y comenzando por Ana. Cada jugador en su turno debe retirar un número positivo de piedras que sea capicúa. El que logre dejar la caja vacía gana. Determinar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora, y explicar cuál es esa estrategia.  
*Nota.* Un entero positivo es capicúa si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 3, 22, 484 y 2002 son capicúas.
- 2.4** Sean  $ABC$  un triángulo rectángulo, recto en  $B$ , y  $M$  el punto medio del lado  $BC$ . Sea  $P$  el punto en la bisectriz del ángulo  $\angle BAC$  tal que  $PM$  es perpendicular a  $BC$  ( $P$  está fuera del triángulo  $ABC$ ). Determinar el área del triángulo  $ABC$  si  $PM = 1$  y  $MC = 5$ .
- 2.5** Decimos que un entero positivo  $n$  es *circular* si es posible colocar los números  $1, 2, \dots, n$  alrededor de una circunferencia de tal manera que no haya tres números adyacentes cuya suma sea múltiplo de 3.  
(a) Demostrar que 9 no es circular.  
(b) Demostrar que todo entero mayor que 9 es circular.

## XXVII Olimpiada (2021)

- 2.1** En el pizarrón están escritos los 99 números  $1, 2, 3, \dots, 98, 99$ . Hay que pintar 50 de ellos de manera tal que la suma de cualesquiera dos números pintados diferentes nunca sea igual a 99 ni a 100. ¿De cuántas maneras se puede hacer?
- 2.2** Sea  $N$  un entero positivo. Un divisor de  $N$  es *propio* si es mayor que 1 y menor que  $N$ . Por ejemplo, 2, 3, 6 y 9 son todos los divisores propios de 18. Un entero positivo es *especial* si tiene al menos dos divisores propios y es múltiplo de todas las posibles diferencias entre dos de ellos. Determinar todos los enteros positivos que son especiales.
- 2.3** Sean  $ABC$  un triángulo y  $D$  un punto en su interior tal que  $\angle DBC = 60^\circ$  y  $\angle DCB = \angle DAB = 30^\circ$ . Si  $M$  y  $N$  son los puntos medios de  $AC$  y  $BC$ , respectivamente, demostrar que  $\angle DMN = 90^\circ$ .
- 2.4** En cada vértice de un polígono de 13 lados escribimos uno de los números  $1, 2, 3, \dots, 12, 13$ , sin repetir. Luego, en cada lado del polígono escribimos la diferencia de los números de los vértices de sus extremos (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si dos vértices consecutivos del polígono tienen los números 2 y 11, en el lado que determinan se escribe el número 9.
- (a) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados solo se escriban los números 3, 4 y 5?
- (b) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados solo se escriban los números 3, 4 y 6?
- 2.5** Demostrar que existen 100 enteros positivos distintos  $n_1, n_2, \dots, n_{100}$  tales que

$$\frac{n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_{100}^3}{100}$$

es un cubo perfecto.

## XXVIII Olimpiada (2022)

- 2.1** En un tablero de  $7 \times 7$  algunas casillas están pintadas de rojo. Sea  $a$  la cantidad de filas que tienen un número impar de casillas rojas y sea  $b$  la cantidad de columnas que tienen un número impar de casillas rojas. Determinar todos los posibles valores de  $a + b$ . Para cada valor hallado, dar un ejemplo de cómo puede estar pintado el tablero.
- 2.2** Hay nueve tarjetas que tienen escritos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, un dígito en cada tarjeta. Usando todas las tarjetas se forman algunos números (por ejemplo, se podrían formar los números 8, 213, 94, 65 y 7).
- (a) Si todos los números formados son primos, determinar el mínimo valor posible de su suma.
- (b) Si todos los números formados son compuestos, determinar el mínimo valor posible de su suma.
- Nota:* Un número  $p$  es primo si sus únicos divisores son 1 y  $p$ . Un número es compuesto si tiene más de dos divisores. El 1 no es primo ni compuesto.
- 2.3** Sean  $ABCD$  un cuadrado,  $E$  un punto del lado  $CD$  y  $F$  un punto en el interior del cuadrado tal que el triángulo  $BFE$  es isósceles y  $\angle BFE = 90^\circ$ . Si  $DF = DE$ , calcular la medida del ángulo  $FDE$ .
- 2.4** (a) En cada vértice de un triángulo se escribe un entero positivo. Luego, en cada lado del triángulo se escribe el máximo común divisor de sus extremos. ¿Es posible que los números escritos en los lados sean tres enteros consecutivos, en algún orden?
- (b) En cada vértice de un tetraedro se escribe un entero positivo. Luego, en cada arista del tetraedro se escribe el máximo común divisor de sus extremos. ¿Es posible que los números escritos en los lados sean seis enteros consecutivos, en algún orden?
- 2.5** En el pizarrón están marcados los vértices de un polígono regular de  $N$  lados. Ana y Beto juegan por turnos, empieza Ana. Cada jugador en su turno debe hacer una de las siguientes acciones:

- unir dos vértices con un segmento, sin cortar otro segmento ya marcado; o
- borrar un vértice que no pertenezca a ningún segmento marcado.

El jugador que en su turno no pueda realizar ninguna acción pierde el juego.

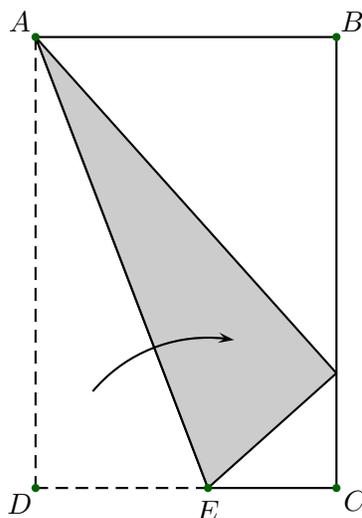
Determinar cuál de los dos jugadores puede asegurarse la victoria:

- (a) si  $N = 28$ ;
- (b) si  $N = 29$ .

*Nota:* Dos segmentos marcados pueden compartir un vértice.

## XXIX Olimpiada (2023)

- 2.1** El día de Pascuas, 4 niños y sus madres participaron de un juego en el que había que encontrar huevos de chocolate que estaban escondidos. Agustín encontró 4 huevos, Bruno encontró 6, Carlos encontró 9 y Daniel encontró 12. La señora Gómez encontró la misma cantidad de huevos que su hijo, la señora Junco encontró el doble de huevos que su hijo, la señora Messi encontró el triple de huevos que su hijo y la señora Núñez encontró el quintuple de huevos que su hijo. Al final del día, guardaron todos los huevos en cajas, con 18 huevos en cada caja, y sobró un solo huevo. Determinar quién es la madre de cada niño.
- 2.2** Sean  $a, b, c, d, e$  enteros positivos tales que  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$  y  $a + b + c + d + e = 1002$ .
- Determinar el mayor valor posible de  $a + c + e$ .
  - Determinar el menor valor posible de  $a + c + e$ .
- 2.3** En el pizarrón están escritos los 49 números  $2, 3, 4, \dots, 49, 50$ . Una operación permitida consiste en elegir dos números distintos  $a$  y  $b$  del pizarrón tales que  $a$  sea múltiplo de  $b$  y borrar exactamente uno de los dos. María hace una secuencia de operaciones permitidas hasta que observa que ya no es posible hacer ninguna más. Determinar la mínima cantidad de números que pueden quedar en el pizarrón en ese momento.
- 2.4** Matías tiene una hoja de papel rectangular  $ABCD$ , con  $AB < AD$ . Inicialmente, él dobla la hoja a lo largo de una recta  $AE$ , donde  $E$  es un punto sobre el lado  $DC$ , de modo que el vértice  $D$  quede ubicado sobre el lado  $BC$ , como muestra la figura.



Luego dobla nuevamente la hoja a lo largo de una recta  $AF$ , donde  $F$  es un punto sobre el lado  $BC$ , de modo que el vértice  $B$  quede sobre la recta  $AE$ ; y finalmente dobla la hoja a lo largo de la recta  $EF$ . Matías observó que los vértices  $B$  y  $C$  quedaron ubicados sobre un mismo punto del segmento  $AE$  después de hacer los dobleces. Calcular la medida del ángulo  $\angle DAE$ .

- 2.5** Sobre la mesa hay 50 pilas de monedas que tienen  $1, 2, 3, \dots, 50$  monedas respectivamente. Ana y Beto juegan al siguiente juego por turnos. Primero, Ana elige una de las 50 pilas de la mesa, y Beto decide si esa pila es para Ana o para él. Después,

Beto elige una de las 49 pilas restantes de la mesa, y Ana decide si esa pila es para ella o para Beto. Ellos continúan jugando alternadamente de esta manera hasta que uno de los jugadores tenga 25 pilas. Cuando eso ocurre, el otro jugador toma todas las pilas restantes de la mesa y el que tiene más monedas, gana. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

## XXX Olimpiada (2024)

**2.1** Se tiene un tablero cuadrulado de  $4 \times 8$  dividido en 32 casillas de  $1 \times 1$  y fichas de  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  y  $4 \times 4$ . Se quiere cubrir totalmente el tablero usando exactamente  $n$  de estas fichas.

- a) ¿Es posible hacerlo si  $n = 19$ ?
- b) ¿Es posible hacerlo si  $n = 14$ ?
- c) ¿Es posible hacerlo si  $n = 7$ ?

En cada caso, si la respuesta es sí, mostrar una forma de cubrir el tablero, y si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

*Aclaración:* Las fichas no se pueden superponer ni salirse del tablero.

**2.2** Decimos que un entero positivo  $n$  es *bueno* si el resultado de multiplicar los primeros  $n$  enteros positivos impares usa solamente los dígitos 1, 3, 5 y 9. Por ejemplo,  $n = 3$  es bueno, porque  $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ , pero  $n = 4$  no lo es, porque  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ . Hallar todos los números buenos.

**2.3** Ana escribe una lista infinita de números con el siguiente procedimiento. El primer número de la lista es un entero positivo  $a$  elegido por Ana. A partir de allí, cada número de la lista se obtiene calculando la suma de todos los números enteros entre 1 y el último número escrito. Por ejemplo, si  $a = 3$ , la lista de Ana comienza con

$$3, 6, 21, 231, \dots$$

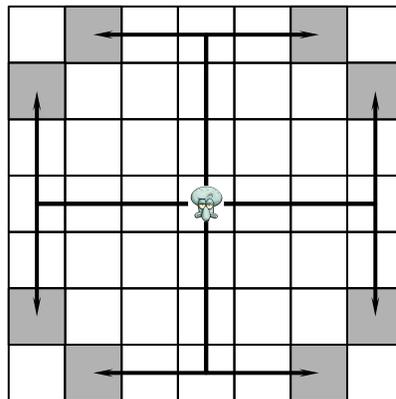
porque  $1 + 2 + 3 = 6$ ,  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + 21 = 231$ .

Determinar si es posible que todos los números de la lista de Ana sean pares.

**2.4** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo, y sean  $M, N, P, Q$  los puntos medios de los lados  $AB, CD, BC, DA$  respectivamente. La recta  $MN$  corta a los segmentos  $AP$  y  $CQ$  en  $X$  e  $Y$  respectivamente. Supongamos que  $MX = NY$ .

Demostrar que  $\text{área}(ABCD) = 4 \cdot \text{área}(BXDY)$ .

**2.5** Un *calamardo* es una pieza que se mueve en un tablero de la siguiente manera: avanza tres casillas en una dirección y a continuación, dos casillas en una dirección perpendicular. Por ejemplo, en la siguiente figura, haciendo una movida el calamardo se puede mover a cualquiera de las 8 casillas indicadas con las flechas.



Inicialmente, hay un calamardo en cada una de las 35 casillas de un tablero de  $5 \times 7$ . Al mismo tiempo, cada uno de ellos hace exactamente una movida. ¿Cuál es el menor número posible de casillas vacías después de esas movidas?

## XXXI Olimpiada (2025)

**2.1** Un número de tres dígitos  $abc$ , con  $a$  y  $b$  distintos de 0, es *bacano* si los números de dos dígitos  $ab$ ,  $bc$  y  $ac$  son divisores de  $abc$ . Encontrar todos los números bacanos.

*Aclaración:* Los dígitos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  no son necesariamente distintos.

**2.2** Se tiene una lista infinita de números enteros que cumple las siguientes condiciones:

- El primer número de la lista es 1.
- Cada número de la lista, a partir del segundo, es mayor que el número anterior.
- Para cada  $n > 1$ , el número en la posición  $n$  de la lista es menor o igual que  $2n - 2$ .

Demostrar que en esta lista hay dos números cuya diferencia (resta) es igual a 2025.

**2.3** Sea  $ABCD$  un paralelogramo, de lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , con  $\angle ABC = 90^\circ$ . Se construye un cuadrado  $ABEF$ , exterior al paralelogramo, con lados  $AB$ ,  $BE$ ,  $EF$  y  $FA$ . Sea  $F'$  el simétrico de  $F$  respecto de  $DE$ . Hallar el valor del ángulo  $BF'C$ .

*Aclaración:* El simétrico de un punto  $P$  respecto de una recta  $\ell$  es un punto  $Q$  tal que  $\ell$  es perpendicular al segmento  $PQ$  y lo corta en su punto medio.

**2.4** Sea  $S = \{2025, 2026, 2027, \dots\}$  el conjunto de todos los enteros mayores o iguales que 2025. Determinar si es posible pintar cada número de  $S$  de rojo, azul o verde, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- Para cada color, hay por lo menos un número de  $S$  pintado de ese color.
- Siempre que dos números distintos de  $S$ , digamos  $a$  y  $b$ , estén pintados con dos colores diferentes, el número  $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b)$  debe estar pintado con el tercer color.

*Aclaración:* Denotamos  $\text{mcd}(a, b)$  al máximo común divisor de  $a$  y  $b$  y  $\text{mcm}(a, b)$  al mínimo común múltiplo de  $a$  y  $b$ .

**2.5** Determinar si existe algún entero positivo  $m$  tal que los primeros cuatro dígitos después de la coma del número  $m$  forman el número 2025.

*Aclaración:* Por ejemplo, el número que forman los primeros cuatro dígitos después de la coma de  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$  es 4142.