Problemas de la Olimpiada de Mayo

(Nivel 1)

1995 - 2025

Juan Neyra Faustino

Agosto 2025

JN

I Olimpiada (1995)

1.1 La comisión directiva de una sociedad secreta está formada por cuatro personas. Para admitir nuevos socios se rigen por los siguientes criterios:

- votan solamente los 4 integrantes de la Directiva, pudiéndolo hacer de tres formas: a favor, en contra o absteniéndose,
- cada aspirante debe obtener por lo menos dos votos a favor y ninguno en contra.

En la última reunión de la Directiva, se consideraron 8 solicitudes de ingreso. Del total de votos emitidos, resultaron 23 votos a favor, 2 votos en contra y 7 abstenciones. ¿Cuál es la mayor y cuál es la menor cantidad de solicitudes que pudieron ser aceptadas en esta ocasión?

1.2 Julia tiene 289 monedas guardadas en cajas. Todas las cajas contienen la misma cantidad de monedas (que es mayor que 1) y en cada caja sólo hay monedas de un mismo país.

Las monedas de Bolivia son más del $6\,\%$ del total, las de Chile más del $12\,\%$ del total, las de México más del $24\,\%$ del total y las de Perú más del $36\,\%$ del total. ¿Puede tener Julia alguna moneda de Uruguay?

1.3 Rodolfo y Gabriela tienen 9 fichas numeradas del 1 al 9 y se entretienen con el siguiente juego:

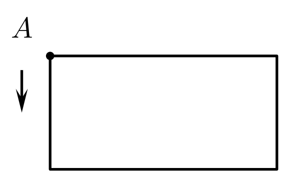
Sacan alternadamente 3 fichas cada uno, con las siguientes reglas:

- Comienza el juego Rodolfo, eligiendo una ficha y en los turnos siguientes debe tomar, cada vez, una ficha tres unidades menor que la última que sacó Gabriela.
- Gabriela, a su vez, elige la primera ficha y en los turnos siguientes debe tomar, cada vez, una ficha 2 unidades menor que la última que ella misma sacó.
- Gana el que obtiene el número mayor al sumar sus tres fichas.
- Si el juego no se puede completar, hay empate.

Si los 2 juegan sin equivocarse, ¿cómo debe jugar Rodolfo para asegurarse no perder?

1.4 Tenemos 4 triángulos equiláteros blancos de 3 centímetros de lado y los unimos por sus lados de forma de obtener una pirámide de base triangular. En cada arista de la pirámide marcamos 2 puntos rojos que la dividen en tres partes iguales. Numera los puntos rojos de forma tal que al recorrerlos en el orden que estos números te indiquen, resulte un camino de la menor longitud posible. ¿Cuánto mide ese camino?

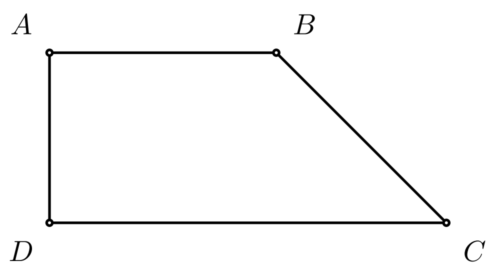
1.5 Una tortuga camina a 60 metros por hora y una lagartija lo hace a 240 metros por hora. Ambas parten con la misma dirección desde el vértice A de una pista rectangular de 120 metros de largo y 60 metros de ancho, como indica la figura.



La lagartija tiene por costumbre avanzar dos lados consecutivos de la pista, retroceder uno, volver a avanzar dos, volver a retroceder uno y así sucesivamente. ¿Cuántas veces y en qué lugares se encuentran la tortuga y la lagartija mientras la tortuga completa su primera vuelta?

II Olimpiada (1996)

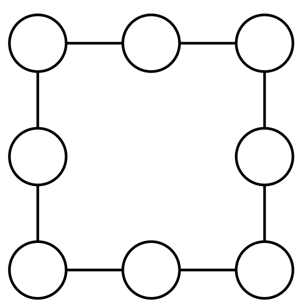
1.1 Un terreno ($ABCD$) tiene forma de trapecio rectangular. El ángulo en A mide 90º. AB mide 30 m, AD mide 20 m y DC mide 45 m. Este terreno se tiene que dividir en dos terrenos de igual área trazando una paralela al lado AD. ¿A qué distancia de D hay que trazar la paralela?



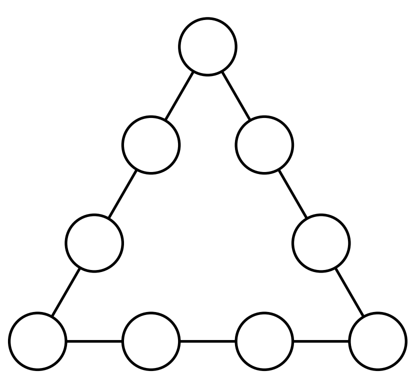
1.2 Considerando los números naturales de tres cifras, ¿en cuántos de ellos al sumar dos de sus cifras se obtiene el doble de la restante? Justifica tu respuesta.

1.3 A y B son dos recipientes cilíndricos que contienen agua. La altura de agua en A es 1000 cm y en B, 350 cm. Utilizando una bomba, se transfiere agua desde A hacia B. Se nota que, en el recipiente A, la altura del agua disminuye 4 cm por minuto y en B aumenta 9 cm por minuto. ¿Después de cuánto tiempo, desde que se comenzó a utilizar la bomba, las alturas en A y en B serán iguales?

1.4 (a) En este dibujo, hay tres casillas en cada lado del cuadrado. Ubica un número natural en cada una de las casillas de modo que la suma de los números de dos casillas contiguas sea siempre impar.



(b) En este dibujo, hay ahora cuatro casillas en cada lado del triángulo. Justifica por qué no se puede ubicar un número natural en cada casilla de modo que la suma de los números de dos casillas contiguas sea siempre impar.



(c) Si dibujas ahora un polígono de 51 lados y en cada lado ubicas 50 casillas, cuidando que en cada vértice haya una casilla. ¿Puedes ubicar un número natural en cada casilla de modo que la suma de los números de dos casillas contiguas sea siempre impar? ¿Por qué?

1.5 En un juego electrónico de preguntas y respuestas, por cada acierto del jugador se le suman 5 puntos en la pantalla, por cada respuesta incorrecta se le restan 2 puntos y cuando el jugador no contesta, no se suma ni se resta puntaje. Cada partido tiene 30 preguntas. Francisco jugó 5 partidos y en todos obtuvo la misma cantidad de puntos, mayor que cero, pero la cantidad de aciertos, errores y preguntas no respondidas en cada partido fue diferente. Dar todos los posibles puntajes que pudo obtener Francisco.

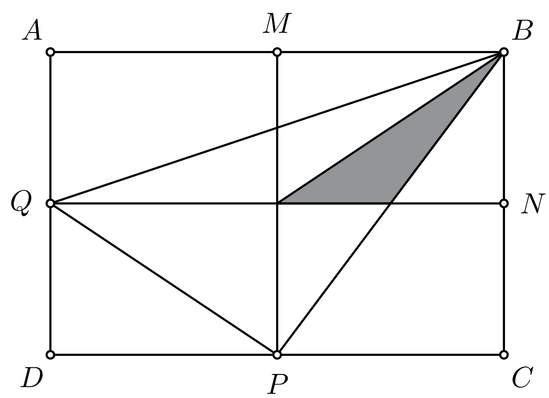
III Olimpiada (1997)

1.1 En un tablero cuadrado con 9 casillas (de tres por tres) se deben colocar nueve elementos del conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ diferentes entre sí, de modo que cada uno esté en una casilla y se cumplan las siguientes condiciones:

- Las sumas de los números de la segunda y tercera fila sean, respectivamente, el doble y el triple de la suma de los números de la primera fila.
- Las sumas de los números de la segunda y tercera columna sean, respectivamente, el doble y el triple de la suma de los números de la primera columna.

Mostrar todas las formas posibles de ubicar elementos de S en el tablero, cumpliendo las condiciones indicadas.

1.2 En el rectángulo $ABCD$, M, N, P y Q son los puntos medios de los lados. Si el área del triángulo sombreado es 1, calcular el área del rectángulo $ABCD$.



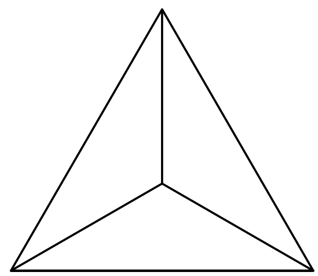
1.3 En un tablero de 8×8 se han colocado 10 fichas que ocupan, cada una, una casilla. En cada casilla sin ficha está escrito un número entre 0 y 8, que es igual a la cantidad de fichas colocadas en sus casillas vecinas. Casillas vecinas son las que tienen un lado o un vértice en común. Dar una distribución de las fichas que haga que la suma de los números escritos en el tablero sea la mayor posible.

1.4 Joaquín y su hermano Andrés van todos los días a clase en el autobús de la línea 62. Joaquín paga siempre los boletos. Cada boleto tiene impreso un número de 5 dígitos. Un día, Joaquín observa que los números de sus boletos - el suyo y el de su hermano - además de consecutivos, son tales que la suma de los diez dígitos es precisamente 62. Andrés le pregunta si la suma de alguno de los boletos es 35 y, al saber la respuesta, puede decir correctamente el número de cada boleto. ¿Cuáles eran esos números?

1.5 Cuando Pablo cumple 15 años, celebra una fiesta invitando a 43 amigos. Les presenta una torta (pastel) en forma de polígono regular de 15 lados y sobre ella coloca 15 velas. Las velas se disponen de manera que entre velas y vértices nunca hay tres alineados (tres velas cualesquiera no están alineadas, ni dos velas cualesquiera con un vértice del polígono, ni dos vértices cualesquiera del polígono con una vela). Luego Pablo divide la torta en trozos triangulares, mediante cortes que unen velas entre si o velas y vértices, pero que además no se cruzan con otros ya realizados. ¿Por qué, al hacer eso, Pablo pudo distribuir un trozo a cada uno de sus invitados pero él se quedó sin comer?

IV Olimpiada (1998)

1.1 Con seis varillas se construye una pieza como la de la figura.

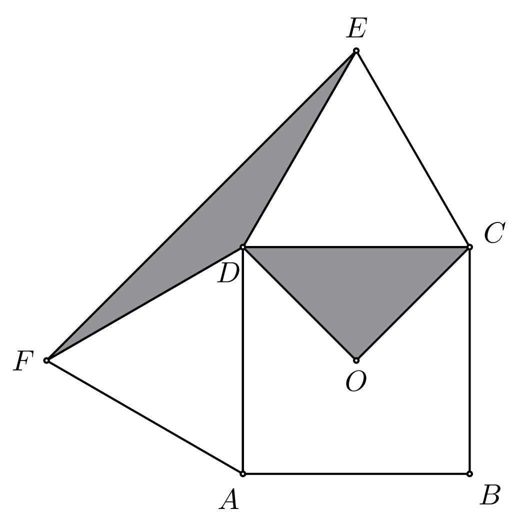


Las tres varillas exteriores son iguales entre sí. Las tres varillas interiores son iguales entre sí. Se desea pintar cada varilla de un solo color de modo que en cada punto de unión, las tres varillas que llegan tengan distinto color. Las varillas sólo se pueden pintar de azul, blanco, rojo o verde. ¿De cuántas maneras se puede pintar la pieza?

1.2 Se tienen 1998 piezas rectangulares de 2 cm de ancho y 3 cm de largo y con ellas se arman cuadrados (sin superposiciones ni huecos). ¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados diferentes que se pueden tener al mismo tiempo?

1.3 Hay cuatro botes en una de las orillas del río; sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, pero no más de uno, y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al del más lento de los dos botes. Un solo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla. ¿Cuál es la menor cantidad de tiempo que necesita para completar el traslado?

1.4 $ABCD$ es un cuadrado de centro O. Sobre los lados BC y AD se han construido los triángulos equiláteros DAF y DCE. Decide si el área del triángulo EDF es mayor, menor o igual que el área del triángulo DOC.



1.5 Elige un número de cuatro cifras (ninguna de ellas cero) y comenzando con él construye una lista de 21 números distintos, de cuatro cifras cada uno, que cumpla la siguiente regla: después de escribir cada nuevo número en la lista se calculan todos los promedios entre dos cifras de ese número, se descartan aquellos promedios que no dan un número entero, y con los restantes se forma un número de cuatro cifras que ocupará el siguiente lugar en la lista. Por ejemplo, si en la lista se escribió el 2946, el siguiente puede ser 3333 o 3434 o 5345 o cualquier otro número armado con las cifras 3, 4 o 5.

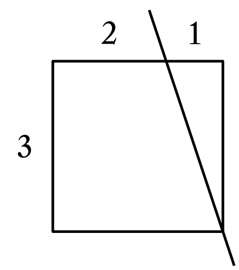
V Olimpiada (1999)

1.1 Se eligen dos números enteros entre 1 y 100 inclusive tales que su diferencia es 7 y su producto es múltiplo de 5. ¿De cuántas maneras se puede hacer esta elección?

1.2 En un paralelogramo $ABCD$, BD es la diagonal mayor. Al hacer coincidir B con D mediante un doblez se forma un pentágono regular. Calcular las medidas de los ángulos que forma la diagonal BD con cada uno de los lados del paralelogramo.

1.3 En cada escalón de una escalera de 10 peldaños hay una rana. Cada una de ellas puede, de un salto, colocarse en otro escalón, pero cuando lo hace, al mismo tiempo, otra rana saltará la misma cantidad de escalones en sentido opuesto: una sube y otra baja. ¿Conseguirán las ranas colocarse todas juntas en un mismo escalón?

1.4 Diez cartones cuadrados de 3 centímetros de lado se cortan por una línea, como indica la figura.



Luego de los cortes se tienen 20 piezas: 10 triángulos y 10 trapecios. Armar un cuadrado que utilice las 20 piezas sin superposiciones ni huecos.

1.5 Ana, Beatriz, Carlos, Diego y Emilia juegan un torneo de ajedrez. Cada jugador se enfrenta una sola vez con cada uno de los otros cuatro. Cada jugador se anota 2 puntos si gana el partido, 1 punto si empata y 0 punto si pierde. Al final del torneo, resulta que las puntuaciones de los 5 jugadores son todas distintas. Hallar el máximo número de empates que pudo haber en el torneo y justificar por qué no pudo haber un número mayor de empates.

VI Olimpiada (2000)

1.1 Hallar todos los números naturales de cuatro cifras formados por dos dígitos pares y dos dígitos impares que verifican que al multiplicarlos por 2 se obtienen números de cuatro cifras con todos sus dígitos pares y al dividirlos por 2 se obtienen números naturales de cuatro cifras con todos sus dígitos impares.

1.2 Sea ABC un triángulo rectángulo en A, cuyo cateto AC mide 1 cm. La bisectriz del ángulo BAC corta a la hipotenusa en R; la perpendicular a AR trazada por R, corta al lado AB en su punto medio. Hallar la medida del lado AB.

1.3 Para escribir todos los números naturales consecutivos desde $\overline{1ab}$ hasta $\overline{ab2}$ inclusive se han empleado $\overline{1ab1}$ cifras. Determinar cuántas cifras más se necesitan para escribir los números naturales hasta el $\overline{aab}$ inclusive. Dar todas las posibilidades (a y b representan dígitos).

1.4 Se tienen piezas con forma de triángulo equilátero de lados 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (50 piezas de cada tamaño). Se quiere armar un triángulo equilátero de lado 7 utilizando algunas de esas piezas, sin huecos ni superposiciones. ¿Cuál es el menor número de piezas necesarias?

1.5 En una hilera hay 12 naipes que pueden ser de tres clases: con sus dos caras blancas, con sus dos caras negras o con una cara blanca y la otra negra. Inicialmente hay 9 naipes con el lado negro hacia arriba. Se dan vuelta los seis primeros naipes de la izquierda y quedan 9 naipes con la cara negra hacia arriba. A continuación se dan vuelta los seis naipes centrales y quedan así 8 naipes con la cara negra hacia arriba. Finalmente se dan vuelta seis naipes: los tres primeros de la izquierda y los tres últimos de la derecha, y quedan así 3 naipes con la cara negra hacia arriba. Decidir si con esta información se puede saber con certeza cuántos naipes de cada clase hay en la hilera.

VII Olimpiada (2001)

1.1 Sara escribió en el pizarrón un número entero de menos de treinta cifras y que termina en 2. Celia borra el 2 del final y lo escribe al principio. El número que queda escrito es igual al doble del número que había escrito Sara. ¿Qué número escribió Sara?

1.2 Tomamos un rectángulo $ABCD$ de papel; el lado AB mide 5 cm y el lado BC mide 9 cm. Le hacemos tres pliegues:

(1) Llevamos el lado AB sobre el lado BC y denominamos P al punto del lado BC que coincide con A. Se forma entonces un trapecio rectángulo $BCDQ$.

(2) Doblamos de manera que B y Q coincidan. Se forma un polígono de 5 lados $RPCDQ$.

(3) Doblamos de nuevo haciendo coincidir D con C y Q con P. Se forma un nuevo trapecio rectángulo $RPCS$.

Luego de estos pliegues, hacemos un corte perpendicular a SC por su punto medio T y queda el trapecio rectángulo $RUTS$. Calcula el área de la figura que aparece al desplegar el último trapecio $RUTS$.

1.3 Se tienen tres cajas, una azul, una blanca y una roja, y 8 bolillas. Cada una de las bolillas tiene escrito un número del 1 al 8, sin repeticiones. Se distribuyen las 8 bolillas en las cajas, de modo que haya por lo menos 2 bolillas en cada caja. Luego, en cada caja, se suman todos los números escritos en las bolillas que contiene. Los tres resultados se denominan suma azul, suma blanca y suma roja, según el color de la caja correspondiente. Hallar todas las posibles distribuciones tales que la suma roja sea igual al doble de la suma azul, y la suma roja menos la suma blanca sea igual a la suma blanca menos la suma azul.

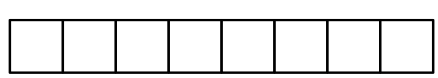
1.4 Utilizando exclusivamente números primos se forma un conjunto con las siguientes condiciones:

(1) Cualquier número primo de una cifra puede estar en el conjunto.

(2) Para que un número primo de más de una cifra esté en el conjunto, deben estar en el conjunto el número que resulta de suprimirle sólo la primera cifra y también el número que resulta de suprimirle sólo la última cifra.

Escribe, de los conjuntos que cumplen estas condiciones, el que tiene mayor cantidad de elementos. Justifica por qué no puede haber uno con más elementos. Recuerda que el número 1 no es primo.

1.5 En un tablero de 8 casillas -como el de la figura- hay inicialmente una ficha en cada casilla.

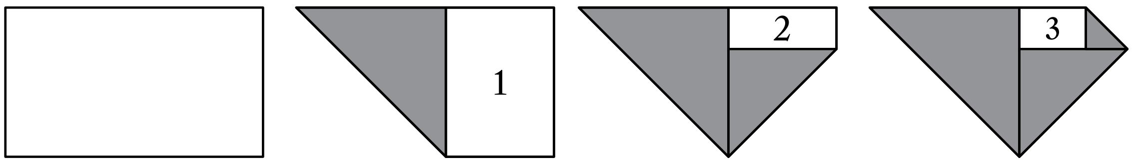


Una jugada consiste en elegir dos fichas y mover una de ellas una casilla hacia la derecha y la otra, una casilla hacia la izquierda. Si después de 4 jugadas las 8 fichas están distribuidas en sólo 2 casillas, determina cuáles pueden ser esas casillas y cuántas fichas hay en cada una.

VIII Olimpiada (2002)

1.1 Un grupo de hombres, algunos de ellos acompañados por su esposa, gastaron 1000 dólares en un hotel. Cada hombre gastó 19 dólares y cada mujer 13 dólares. Determina cuántas mujeres y cuántos hombres había.

1.2 Una hoja rectangular de papel (blanca de un lado y gris del otro) fue doblada tres veces, como lo muestra la figura:



El rectángulo 1, que quedó de color blanco luego del primer doblez, tiene 20 cm más de perímetro que el rectángulo 2, que quedó blanco luego del segundo doblez, y éste a su vez tiene 16 cm más de perímetro que el rectángulo 3, que quedó blanco luego del tercer doblez. Determina el área de la hoja.

1.3 Mustafá compró una gran alfombra. El vendedor midió la alfombra con una regla que supuestamente medía un metro. Como resultó de 30 metros de largo por 20 metros de ancho, le cobró 120000 rupias. Cuando Mustafá llegó a su casa midió nuevamente la alfombra y se dio cuenta que el vendedor le había cobrado 9408 rupias de más. ¿Cuántos centímetros mide la regla que usó el vendedor?

1.4 En un banco sólo el director conoce la combinación de la caja fuerte, que es un número de cinco dígitos. Para respaldar esta combinación se da a cada uno de los diez empleados del banco un número de cinco dígitos. Cada uno de estos números de respaldo tiene en una de las cinco posiciones el mismo dígito que la combinación y en las otras cuatro posiciones un dígito diferente del que tiene en ese lugar la combinación. Los números de respaldo son: 07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237, 97665. ¿Cuál es la combinación de la caja fuerte?

1.5 Halla el máximo número de cajitas de $3 \times 5 \times 7$ que se pueden colocar dentro de una caja de $11 \times 35 \times 39$. Para el número hallado, indica cómo ubicarías esa cantidad de cajitas dentro de la caja.

IX Olimpiada (2003)

1.1 Pedro escribe todos los números de cuatro cifras distintas que se pueden armar con dígitos a, b, c, d que cumplen las siguientes condiciones:

$$a \neq 0; \quad b = a + 2; \quad c = b + 2; \quad d = c + 2.$$

Calcula la suma de todos los números que escribió Pedro.

1.2 El triángulo ABC es rectángulo en A y R es el punto medio de la hipotenusa BC. Sobre el cateto mayor AB se marca el punto P tal que $CP = BP$ y sobre el segmento BP se marca el punto Q tal que el triángulo PQR es equilátero. Si el área del triángulo ABC es 27, calcula el área del triángulo PQR.

1.3 Determina el menor número entero positivo que termina en 56, es múltiplo de 56 y tiene la suma de sus dígitos igual a 56.

1.4 Celia elige un número n y escribe la lista de los números naturales desde 1 hasta n:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n.$$

En cada paso, cambia la lista: copia el primer número al final y borra los dos primeros. Después de $n-1$ pasos quedará escrito un único número. Por ejemplo, para $n = 6$ los cinco pasos son:

$$1,2,3,4,5,6 \ \rightarrow \ 3,4,5,6,1 \ \rightarrow \ 5,6,1,3 \ \rightarrow \ 1,3,5 \ \rightarrow \ 5,1 \ \rightarrow \ 5$$

y queda escrito el número 5. Celia eligió un número n entre 1000 y 3000 y después de $n-1$ pasos quedó escrito el número 1. Determina todos los valores de n que pudo haber elegido Celia. Justifica por qué esos valores sirven, y los demás no.

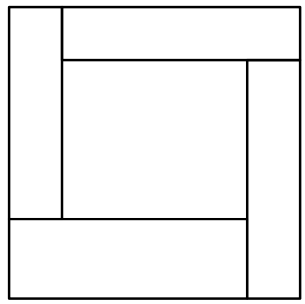
1.5 Se tiene un tablero cuadriculado de 4×4. Definimos la ***separación*** entre dos casillas como el menor número de movidas que debe emplear un caballo de ajedrez para ir de una casilla a la otra (utilizando movimientos del caballo). Tres casillas A, B, C forman un ***trío bueno*** si las tres separaciones entre A y B, entre A y C y entre B y C son iguales. Determina el número de tríos buenos que se forman en el tablero.

Aclaración: en cada movida el caballo se desplaza 2 casillas en dirección horizontal más una casilla en dirección vertical o se desplaza 2 casillas en dirección vertical más una casilla en dirección horizontal.

X Olimpiada (2004)

1.1 Javier multiplica cuatro dígitos, no necesariamente distintos, y obtiene un número terminado en 7. Determina cuánto puede valer la suma de los cuatro dígitos que multiplica Javier. Da todas las posibilidades.

1.2 En el interior de un cuadrado de 11×11, Pablo dibujó un rectángulo y prolongando sus lados dividió al cuadrado en 5 rectángulos, como muestra la figura.



Sofía hizo lo mismo, pero además logró que las longitudes de los lados de los 5 rectángulos sean números enteros entre 1 y 10, todos distintos. Muestra una figura como la que hizo Sofía.

1.3 En cada casilla de un tablero de 5×5 está escrito 1 ó -1. En cada *paso* se reemplaza el número de cada una de las 25 casillas por el resultado de la multiplicación de los números de todas sus casillas vecinas. Inicialmente se tiene el tablero de la figura.

1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Muestra cómo queda el tablero al cabo de 2004 pasos.

Aclaración: dos casillas son vecinas si tienen un lado común.

1.4 En un cuadrado $ABCD$ de diagonales AC y BD, llamamos O al centro del cuadrado. Se construye un cuadrado $PQRS$ de lados paralelos a los del $ABCD$ con P en el segmento AO, Q en el segmento BO, R en el segmento CO, S en el segmento DO. Si área$(ABCD) = 2$área$(PQRS)$ y M es el punto medio del lado AB, calcula la medida del ángulo AMP.

1.5 Se tienen 90 tarjetas y en cada una están escritos dos dígitos distintos: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, y así siguiendo hasta 98. Un conjunto de tarjetas es *correcto* si no contiene ninguna tarjeta que tenga el primer dígito igual al segundo dígito de otra tarjeta del conjunto. Llamamos *valor* de un conjunto de tarjetas a la suma de los números escritos en cada tarjeta. Por ejemplo, las cuatro tarjetas 04, 35, 78 y 98 forman un conjunto correcto y su valor es 215, pues $04 + 35 + 78 + 98 = 215$. Encuentra un conjunto correcto que tenga el mayor valor posible. Explica por qué es imposible lograr un conjunto correcto de mayor valor.

XI Olimpiada (2005)

1.1 En el pizarrón había seis figuras: un círculo, un triángulo, un cuadrado, un trapecio, un pentágono y un hexágono, pintadas de seis colores: azul, blanco, rojo, amarillo, verde y marrón. Cada figura tenía un solo color y todas las figuras eran de colores distintos.

Al día siguiente se preguntó de qué color era cada figura.

Pablo respondió: "El círculo era rojo, el triángulo era azul, el cuadrado era blanco, el trapecio era verde, el pentágono era marrón y el hexágono era amarillo."

Sofía respondió: "El círculo era amarillo, el triángulo era verde, el cuadrado era rojo, el trapecio era azul, el pentágono era marrón y el hexágono era blanco."

Pablo se equivocó tres veces y Sofía dos veces, y se sabe que el pentágono era marrón.

Determina si es posible saber con certeza cuál era el color de cada una de las figuras.

1.2 Un número entero se llama *autodivi* si es divisible entre el número de dos cifras formado por sus dos últimos dígitos (decenas y unidades). Por ejemplo, 78013 es autodivi pues es divisible entre 13, 8517 es autodivi pues es divisible entre 17. Halla 6 números enteros consecutivos que sean autodivi y que tengan las cifras de las unidades, de las decenas y de las centenas distintas de 0.

1.3 Un segmento AB de longitud 100 está dividido en 100 segmentitos de longitud 1 mediante 99 puntos intermedios. Al extremo A se le asigna el 0 y al extremo B, el 1. Gustavo asigna a cada uno de los 99 puntos intermedios un 0 o un 1, a su elección, y luego colorea cada segmento de longitud 1 de azul o de rojo, respetando la siguiente regla:

Son rojos los segmentos que tienen el mismo número en sus extremos y son azules los segmentos que tienen diferentes números en sus extremos.

Determina si Gustavo puede asignar los 0 y los 1 de modo de obtener exactamente 30 segmentos azules. ¿Y 35 segmentos azules? (En cada caso, si la respuesta es sí, muestra una distribución de los 0 y los 1, y si la respuesta es no, explica el porqué.)

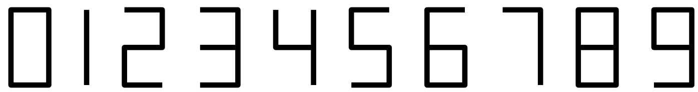
1.4 Se tienen dos figuras de papel: un triángulo equilátero y un rectángulo. La altura del rectángulo es igual a la altura del triángulo y la base del rectángulo es igual a la base del triángulo. Divide al triángulo en tres partes y al rectángulo en dos, mediante cortes rectos, de modo que con los cinco pedazos se pueda armar, sin huecos ni superposiciones, un triángulo equilátero. Para armar la figura, cada parte se puede girar y/o dar vuelta.

1.5 (a) En cada casilla de un tablero de 7×7 se escribe uno de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7 de manera que cada número esté escrito en siete casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?

(b) En cada casilla de un tablero de 5×5 se escribe uno de los números: 1, 2, 3, 4 ó 5 de manera que cada número esté escrito en cinco casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?

XII Olimpiada (2006)

1.1 Un calendario digital exhibe la fecha: día, mes y año, con 2 dígitos para el día, 2 dígitos para el mes y 2 dígitos para el año. Por ejemplo, 01-01-01 es el primero de enero de 2001 y 25-05-23 es el 25 de mayo de 2023. Frente al calendario hay un espejo. Los dígitos del calendario son como los de la figura:



Si 0, 1, 2, 5 y 8 se reflejan, respectivamente, en 0, 1, 5, 2 y 8, y los demás dígitos pierden sentido al reflejarse, determinar cuántos días del siglo, al reflejarse en el espejo, también corresponden a una fecha.

1.2 Un rectángulo de papel de 3 cm por 9 cm se dobla a lo largo de una recta, haciendo coincidir dos vértices opuestos. De este modo se forma un pentágono. Calcular su área.

1.3 Hay 20 puntos alineados, separados por una misma distancia:

Miguel tiene que pintar de rojo tres o más de estos puntos, de manera tal que los puntos rojos estén separados por una misma distancia y sea imposible pintar de rojo exactamente un punto más sin violar la condición anterior. Determinar de cuántas maneras puede Miguel hacer su tarea.

1.4 Con 150 cubitos blancos de $1 \times 1 \times 1$ se arma un prisma de $6 \times 5 \times 5$, se pintan sus seis caras de azul y luego se desarma el prisma. Lucrecia debe armar un nuevo prisma, sin huecos, usando exclusivamente cubitos que tengan al menos una cara azul y de modo que las caras del prisma de Lucrecia sean todas completamente azules. Dar las dimensiones del prisma de mayor volumen que puede armar Lucrecia.

1.5 En algunas casillas de un tablero de 10×10 se coloca una ficha de manera que se cumpla la siguiente propiedad:

Para cada casilla que tiene una ficha, la cantidad de fichas colocadas en su misma fila debe ser mayor o igual que la cantidad de fichas colocadas en su misma columna.

¿Cuántas fichas puede haber en el tablero? Dar todas las posibilidades.

XIII Olimpiada (2007)

1.1 En un año que tiene 53 sábados, ¿qué día de la semana es el 12 de mayo? Dar todas las posibilidades.

1.2 Sean $X = \overline{a1b9}$ e $Y = \overline{51ab}$ dos números enteros positivos donde a y b son dígitos. Se sabe que X es múltiplo de un número positivo n de dos cifras e Y es el siguiente múltiplo de ese número n. Hallar el número n y los dígitos a y b. Justificar por qué no hay otras posibilidades.

1.3 Jorge elige 6 números enteros positivos distintos y escribe uno en cada cara de un cubo. Arroja su cubo tres veces.

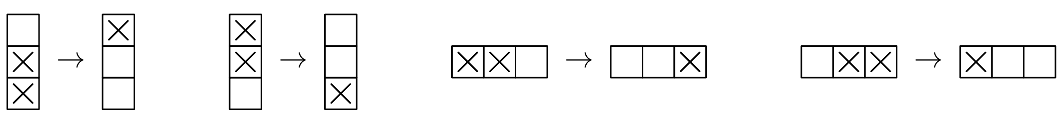
La primera vez su cubo mostró el número 5 hacia arriba y además, la suma de los números de las caras laterales fue 20.

La segunda vez su cubo mostró el número 7 hacia arriba y además, la suma de los números de las caras laterales fue 17.

La tercera vez su cubo mostró el número 4 hacia arriba y además, todos los números de las caras laterales resultaron ser primos.

¿Cuáles son los números que eligió Jorge y cómo los distribuyó en las caras del cubo? Analizar todas las posibilidades. Recordar que 1 no es primo.

1.4 Un tablero de 7×7 tiene una lámpara en cada una de sus 49 casillas, que puede estar encendida o apagada. La operación permitida es elegir 3 casillas consecutivas de una fila o de una columna que tengan dos lámparas vecinas entre sí encendidas y la otra apagada, y cambiar el estado de las tres. Es decir



Dar una configuración de exactamente 8 lámparas encendidas ubicadas en las primeras 4 filas del tablero tales que, mediante una sucesión de operaciones permitidas, se llegue a tener una única lámpara encendida en el tablero y que ésta esté ubicada en la última fila. Mostrar la secuencia de operaciones que se utilizan para lograr el objetivo.

1.5 Se tiene un pentágono de papel, $ABCDE$, tal que

$$AB = BC = 3 \text{ cm},\ CD = DE = 5 \text{ cm},\ EA = 4 \text{ cm};$$

$$\angle ABC = 100^\circ,\ \angle CDE = 80^\circ.$$

Hay que dividir el pentágono en cuatro triángulos, mediante tres cortes rectos, de manera que con los cuatro triángulos se arme un rectángulo, sin huecos ni superposiciones. (Los triángulos se pueden girar y/o dar vuelta.)

XIV Olimpiada (2008)

1.1 ¿Cuántos números distintos de 6 cifras y múltiplos de 45, se pueden escribir añadiendo un dígito a la izquierda y otro a la derecha de 2008?

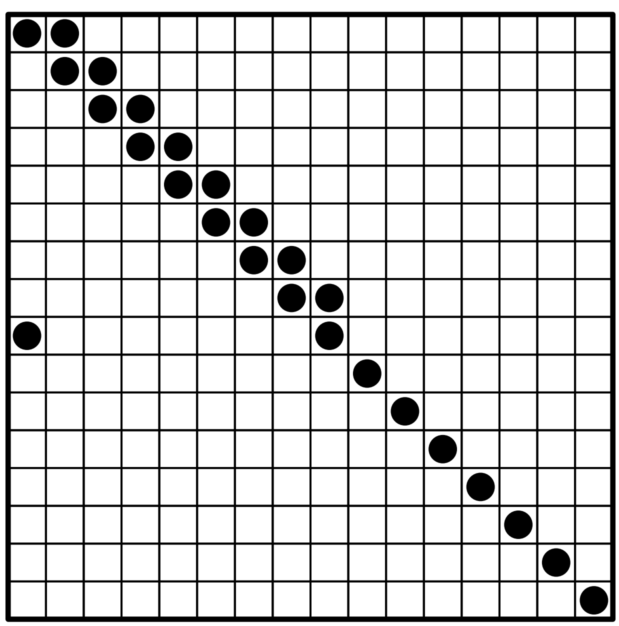
1.2 En el colegio Olímpico los exámenes se califican con números enteros, la menor nota posible es 0, y la mayor es 10. En la clase de aritmética el profesor toma dos exámenes. Este año tiene 15 alumnos. Cuando uno de sus alumnos obtiene en el primer examen menos de 3 y en el segundo examen más de 7, él lo llama *alumno superado*. El profesor, al terminar de corregir los exámenes promedió las 30 notas y obtuvo 8. ¿Cuál es la mayor cantidad de alumnos superados que pudo haber tenido esta clase?

1.3 En un pizarrón están escritos todos los números enteros del 1 al 2008 inclusive. Se borran dos números y se escribe su diferencia. Por ejemplo, si se borran 5 y 241, se escribe 236. Así se continua, borrando dos números y escribiendo su diferencia hasta que sólo queda un número. Determina si el número que queda al final puede ser 2008. ¿Y 2007?

En cada caso, si la respuesta es afirmativa indica una secuencia con ese número final, y si es negativa, explica por qué.

1.4 Sobre el lado AB de un cuadrado $ABCD$ se dibuja exteriormente el triángulo rectángulo ABF, de hipotenusa AB. Se sabe que $AF = 6$, y que $BF = 8$. Llamamos E al centro del cuadrado. Calcula la longitud de EF.

1.5 En un tablero de 16×16 se colocaron 25 monedas, como en la figura.



Está permitido seleccionar 8 filas y 8 columnas y retirar del tablero todas las monedas que se encuentran en esas 16 líneas. Determina si es posible retirar todas las monedas del tablero.

Si la respuesta es afirmativa, indica las 8 filas y las 8 columnas seleccionadas, y si es negativa, explica por qué.

XV Olimpiada (2009)

1.1 A cada número natural de dos cifras se le asigna un dígito de la siguiente manera: Se multiplican sus cifras. Si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. Si el resultado es un número de dos cifras se multiplican estas dos cifras, y si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. En caso contrario, se repite la operación. Por ejemplo el dígito asignado a 32 es el 6 pues $3 \cdot 2 = 6$; el dígito asignado a 93 es el 4 pues $9 \cdot 3 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$. Halla todos los números de dos cifras a los que se les asigna el 8.

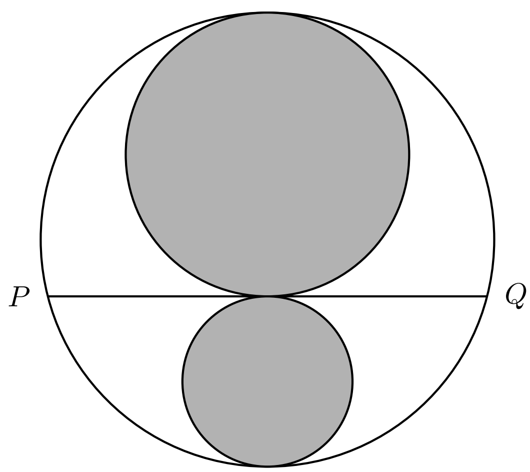
1.2 Encuentra números primos p, q, r para los cuales sea $p + q^2 + r^3 = 200$. Da todas las posibilidades. Recuerda que el número 1 no es primo.

1.3 Se tienen 26 tarjetas y cada una tiene escrito un número. Hay dos con el 1, dos con el 2, dos con el 3, y así siguiendo hasta dos con el 12 y dos con el 13. Hay que distribuir las 26 tarjetas en pilas de manera que se cumplan las dos condiciones siguientes:

- Si dos tarjetas tienen el mismo número están en la misma pila.
- Ninguna pila contiene una tarjeta cuyo número es igual a la suma de los números de dos tarjetas de esa misma pila.

Determina cuál es el mínimo número de pilas que hay que hacer. Da un ejemplo con la distribución de las tarjetas para ese número de pilas y justifica por qué es imposible tener menos pilas.

1.4 Tres circunferencias son tangentes entre sí, tal y como se muestra en la figura.



La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene área igual a 2π. Determina la longitud del segmento PQ.

1.5 Por las líneas de una cuadrícula formada por 55 líneas horizontales y 45 líneas verticales camina una hormiga. Se quiere pintar algunos tramos de líneas para que la hormiga pueda ir de cualquier cruce hasta cualquier otro cruce, caminando exclusivamente por tramos pintados. Si la distancia entre líneas consecutivas es de 10 cm, ¿cuál es la menor cantidad posible de centímetros que se deberán pintar?

XVI Olimpiada (2010)

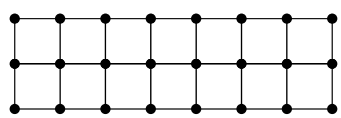
1.1 Un recipiente cerrado con forma de paralelepípedo rectángulo contiene 1 litro de agua. Si el recipiente se apoya horizontalmente sobre tres caras distintas, el nivel del agua es de 2 cm, 4 cm y 5 cm. Calcula el volumen del paralelepípedo.

1.2 En la etapa 0 se escriben los números: 1, 1. En la etapa 1 se intercala la suma de los números: 1, 2, 1. En la etapa 2 entre cada par de números de la etapa anterior se intercala la suma de ellos: 1, 3, 2, 3, 1. Una etapa más: 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. ¿Cuántos números hay en la etapa 10? ¿Cuál es la suma de todos los números que hay en la etapa 10?

1.3 ¿Es posible colorear los enteros positivos con tres colores de modo que siempre que se suman dos números de colores distintos, el resultado de su suma sea del tercer color? (Hay que usar los tres colores.) Si la respuesta es afirmativa, indica un posible coloreo; si no, explica el por qué.

1.4 Halla todos los números naturales de 90 dígitos que son múltiplos de 13 y tienen los primeros 43 dígitos iguales entre sí y distintos de cero, los últimos 43 dígitos iguales entre sí, y los 4 dígitos del medio son 2, 0, 1, 0, en ese orden.

1.5 En un tablero de 2×7 cuadriculado en cuadritos de 1×1 se consideran los 24 puntos que son vértices de los cuadritos. Juan y Matías juegan sobre este tablero. Juan pinta de rojo igual cantidad de puntos en cada una de las tres líneas horizontales. Si Matías puede elegir tres puntos rojos que sean vértices de un triángulo acutángulo, Matías gana el juego. ¿Cuál es la máxima cantidad de puntos que puede colorear Juan para asegurarse de que Matías no gane? (Para el número hallado, da un ejemplo de coloreo que le impida ganar a Matías y justifica por qué si el número es mayor, Matías siempre puede ganar.)



XVII Olimpiada (2011)

1.1 Las 4 palabras codificadas

$$\Box * \otimes \qquad \oplus \# \bullet \qquad * \Box \bullet \qquad \otimes \Diamond \oplus$$

son en algún orden

A M O   S U R   R E O   M A S

Descifrar $\otimes\Diamond\Box * \oplus\#\Box \bullet \otimes$.

1.2 Utilizando una sola vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se escriben el cuadrado y el cubo de un número entero positivo. Determinar cuánto puede valer dicho número.

1.3 En el rectángulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}CD$ y F es el punto donde se cortan AE y BD. El triángulo DFE tiene área 12 y el triángulo ABF tiene área 27. Hallar el área del cuadrilátero $BCEF$.

1.4 Utilizando varios cubitos blancos de arista 1 Guille arma un cubo grande. Luego elige 4 caras del cubo grande y las pinta de rojo. Finalmente desarma el cubo grande y observa que los cubitos con al menos una cara pintada de rojo son 431. Hallar la cantidad de cubitos que utilizó para armar el cubo grande. Analizar todas las posibilidades.

1.5 Consideramos todos los números enteros positivos de 14 dígitos, divisibles por 18, cuyos dígitos son exclusivamente 1 y 2, pero no hay dígitos 2 consecutivos. ¿Cuántos de estos números hay?

XVIII Olimpiada (2012)

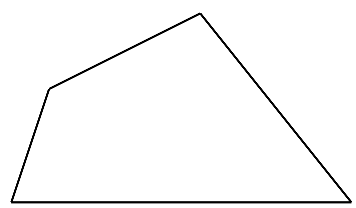
1.1 Pablo dice: Al día de mi cumpleaños le sumo 2 y multiplico el resultado por 2. Al número obtenido le sumo 4 y multiplico el resultado por 5. Al nuevo número obtenido le sumo el número del mes de mi cumpleaños (por ejemplo, si es junio, le sumo 6) y obtengo 342. ¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Pablo? Dar todas las posibilidades.

1.2 Llamamos $S(n)$ a la suma de las cifras del entero n. Por ejemplo, $S(327) = 3+2+7 = 12$. Hallar el valor de

$$A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \cdots + S(2011) - S(2012).$$

(A tiene 2012 términos).

1.3 De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces. Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.



1.4 Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas entrega 13 azules. Decidir si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 el número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas. Si se puede, indicar cómo hacerlo. Si no se puede, indicar por qué.

1.5 En una reunión hay 12 personas. Se sabe que para cada dos personas A y B de la reunión hay (al menos) otra persona C de la reunión que es amiga de A y de B. Determinar el mínimo número de pares de amigos que hay en la reunión. Cada persona puede integrar varios pares. Si X es amigo de Y entonces Y es amigo de X.

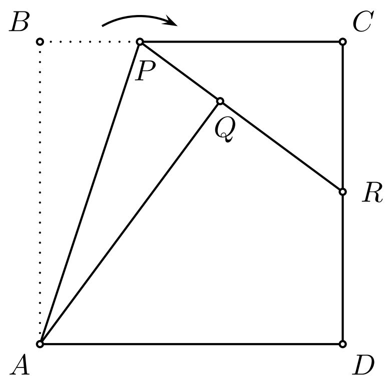
XIX Olimpiada (2013)

1.1 Hallar la cantidad de formas de escribir el número 2013 como suma de dos enteros mayores o iguales que cero de modo que al sumar no haya ningún acarreo.

Aclaración: En la suma $2008 + 5 = 2013$ hay acarreo de las unidades a las decenas.

1.2 Elisa suma los dígitos de su año de nacimiento y observa que el resultado coincide con los dos últimos dígitos del año en que nació su abuelo. Más aún, los dos últimos dígitos del año en que ella nació, son precisamente la edad actual de su abuelo. Hallar el año en el que nació Elisa y el año en el que nació su abuelo.

1.3 Sea $ABCD$ un cuadrado de papel de lado 10 y P un punto en el lado BC. Al doblar el papel a lo largo de la recta AP, el punto B determina el punto Q, como se ve en la figura.



La recta PQ corta al lado CD en R. Calcular el perímetro del triángulo PCR.

1.4 Pablo escribió 5 números en una hoja y luego escribió los números 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11 y 12 en otra hoja que le dio a Sofía, indicándole que esos números son las sumas posibles de dos de los números que él tiene escondidos. Decidir si con esta información Sofía puede determinar los cinco números que escribió Pablo.

1.5 En la pizarra está dibujado un cuadrado de 8×8 dividido en 64 cuadraditos de 1×1 mediante líneas paralelas a los lados. Gustavo borra algunos segmentos de longitud 1 de modo que a cada cuadradito de 1×1 le borra 0, 1 ó 2 lados. Gustavo afirma que borró 6 segmentos de longitud 1 del borde del cuadrado de 8×8 y que la cantidad de cuadraditos de 1×1 que tienen exactamente 1 lado borrado es igual a 5. Decidir si lo que dijo Gustavo puede ser cierto.

XX Olimpiada (2014)

1.1 Un número natural N es bueno si sus dígitos son 1, 2 o 3 y todos los números de 2 dígitos formados por dígitos ubicados en posiciones consecutivas de N son números distintos. ¿Hay algún número bueno de 10 dígitos? ¿Y de 11 dígitos?

1.2 Beatriz tiene tres dados en cuyas caras están escritas letras diferentes. Al tirar los tres dados sobre una mesa, y eligiendo cada vez solamente las letras de las caras de arriba, formó las palabras OSA, VIA, OCA, ESA, SOL, GOL, FIA, REY, SUR, MIA, PIO, ATE, FIN, VID. Determinar las seis letras de cada dado.

1.3 Se tiene nueve cajas. En la primera hay 1 piedra, en la segunda hay 2 piedras, en la tercera hay 3 piedras y así siguiendo, en la octava hay 8 piedras y en la novena hay 9 piedras. La operación permitida es sacar el mismo número de piedras de dos cajas distintas y colocarlas en una tercera caja. El objetivo es que todas las piedras estén en una sola caja. Describir cómo hacerlo con el número mínimo de operaciones permitidas. Explicar porqué es imposible lograrlo con menos operaciones.

1.4 Sea ABC un triángulo rectángulo e isósceles, con $\angle ACB = 90°$. Sean M el punto medio de AB y N el punto medio de AC. Sea P tal que MNP es un triángulo equilátero con P en el interior del cuadrilátero $MBCN$. Calcular la medida del ángulo $\angle CAP$.

1.5 Dadas 6 bolitas: 2 blancas, 2 verdes, 2 rojas, se sabe que hay una blanca, una verde y una roja que pesan 99 g cada una y que las demás bolitas pesan 101 g cada una. Determinar el peso de cada bolita usando dos veces una balanza de dos platos.

Aclaración: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

XXI Olimpiada (2015)

1.1 El maestro pensó en secreto un número S de tres dígitos. Los alumnos A, B, C y D intentaron adivinarlo, diciendo, respectivamente, 541, 837, 291 y 846. El maestro les dijo, “Cada uno de ustedes acertó exactamente un dígito de S y en la posición correcta”. ¿Cuál es el número S?

1.2 Son dadas 6 monedas indistinguibles, 4 son auténticas, todas del mismo peso, y 2 son falsas, una es más liviana que las auténticas y la otra, más pesada que las auténticas. Las dos falsas pesan, en conjunto, lo mismo que dos monedas auténticas. Hallar dos monedas auténticas utilizando dos veces una balanza de dos platos, sin pesas.

Aclaración: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

1.3 En el cuadrilátero $ABCD$, el ángulo C es el triple del ángulo A. Sean P en el lado AB tal que $\angle DPA = 90°$ y Q en el lado AD tal que $\angle BQA = 90°$. Los segmentos DP y BQ se cortan en O de modo que $BO = CO = DO$. Calcular la medida de los ángulos A y C.

1.4 Decimos que un número es *supersticioso* cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Encontrar todos los números supersticiosos.

1.5 En una casa se reúnen veintiséis personas. Alicia es amiga de solo una persona, Bruno es amigo de dos personas, Carlos es amigo de tres, Daniel de cuatro, Elías de cinco, y así siguiendo cada persona es amiga de una persona más que la persona anterior, hasta llegar a Yvonne, la persona número veinticinco, que es amiga de todos. ¿De cuántas personas es amiga Zoila, la persona número veintiséis?

Aclaración: Si A es amigo de B entonces B es amigo de A.

XXII Olimpiada (2016)

1.1 En una hoja están escritos siete números enteros positivos diferentes. El resultado de la multiplicación de los siete numeros es el cubo de un número entero. Si el mayor de los números escritos en la hoja es N, determinar el menor valor posible de N. Mostrar un ejemplo para ese valor de N y explicar por qué no es posible que N sea mas chico.

1.2 En una competición deportiva en la que se realizan varias pruebas, solo participan los tres atletas A, B, C. En cada prueba, el ganador recibe x puntos, el segundo recibe y puntos y el tercero recibe z puntos. No hay empates, y los números x, y, z son enteros positivos distintos con x mayor que y, e y mayor que z. Al terminar la competición resulta que A ha acumulado 20 puntos, B ha acumulado 10 puntos y C ha acumulado 9 puntos. Sabemos que el atleta A fue segundo en la prueba de 100 metros. Determinar cual de los tres atletas resulto segundo en la prueba de salto.

1.3 En el triángulo ABC se marcaron el punto D en el lado BC y el punto E en el lado AC de manera que $CD = DE = EB = BA$. El ángulo ACB mide $20°$. Calcular la medida del ángulo ADE.

1.4 Dado un tablero de 3×3 se quiere escribir en sus casillas los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y un número entero positivo M, no necesariamente distinto de los anteriores. El objetivo es que la suma de los tres números de cada fila sea la misma.

(a) Hallar todos los valores de M para los que esto es posible.

(b) ¿Para cuáles de los valores de M hallados en (a) es posible acomodar los números de modo que no solo las tres filas sumen lo mismo sino que también las tres columnas sumen lo mismo?

1.5 En el pizarrón están escritos los 400 números enteros $1, 2, 3, \ldots, 399, 400$. Luis borra 100 de estos números, luego Martín borra otros 100. Martín gana si la suma de los 200 números borrados es igual a la suma de los no borrados; en otro caso, gana Luis. ¿Cuál de los dos tiene estrategia ganadora? ¿Y si Luis borra 101 números y Martín borra 99? En cada caso, explicar cómo puede asegurarse la victoria el jugador que tiene la estrategia ganadora.

XXIII Olimpiada (2017)

1.1 A cada número de tres dígitos Matías le sumó el número que se obtiene invirtiendo sus dígitos. Por ejemplo, al número 927 le sumó el 729. Calcular en cuántos casos el resultado de la suma de Matías es un número con todos sus dígitos impares.

1.2 ¿Es posible pintar 33 casillas de un tablero de 9×9 de forma que cada fila y cada columna del tablero tenga como máximo 4 casillas pintadas, pero si además pintamos cualquier otra casilla aparece alguna fila o columna que tiene 5 casillas pintadas?

1.3 Sea $ABCD$ un rombo de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre el lado AB se construye el rombo $BAFE$, exterior al $ABCD$ y tal que el lado AF es paralelo a la diagonal BD del $ABCD$. Si el área del $BAFE$ es igual a 65, calcular el área del $ABCD$.

1.4 Sea n un entero par mayor que 2. Sobre los vértices de un polígono regular de n lados se pueden colocar fichas rojas o azules. Dos jugadores, A y B, juegan alternándose turnos del siguiente modo: cada jugador, en su turno, elige dos vértices que no tengan fichas y coloca en uno de ellos una ficha roja y en el otro una ficha azul. El objetivo de A es conseguir que haya tres vértices consecutivos con fichas del mismo color. El objetivo de B es impedir que esto suceda. Al comienzo del juego no hay fichas en ninguno de los vértices. Demostrar que independientemente de quien empiece a jugar, el jugador B siempre podrá conseguir su objetivo.

1.5 Diremos que dos números enteros positivos a y b forman una *pareja adecuada* si $a + b$ divide a ab (su suma divide a su multiplicación). Hallar 24 números enteros positivos que se puedan distribuir en 12 parejas adecuadas, y de modo que cada número entero figure en una sola pareja y el mayor de los 24 números sea lo menor posible.

XXIV Olimpiada (2018)

1.1 Juan hace una lista de 2018 números. El primero es el 1. Luego, cada número se obtiene de sumarle al anterior alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Sabiendo que ninguno de los números de la lista termina en 0, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el último número de la lista?

1.2 Se efectúan mil divisiones enteras: se divide 2018 entre cada uno de los números enteros del 1 al 1000. Se obtienen así mil cocientes enteros con sus respectivos restos. ¿Cuál de estos mil restos es el mayor?

1.3 Sea $ABCDEFGHIJ$ un polígono regular de 10 lados que tiene todos sus vértices en una circunferencia de centro O y radio 5. Las diagonales AD y BE se cortan en P y las diagonales AH y BI se cortan en Q. Calcular la medida del segmento PQ.

1.4 Ana debe escribir 7 enteros positivos, no necesariamente distintos, alrededor de una circunferencia de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de los siete números es igual a 36.
- Si dos números son vecinos la diferencia entre el mayor y el menor es igual a 2 o 3.

Hallar el máximo valor del mayor de los números que puede escribir Ana.

1.5 En cada casilla de un tablero de 5×5 se escribe uno de los números 2, 3, 4 o 5 de manera que la suma de todos los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal siempre sea par. ¿De cuántas formas podemos llenar el tablero?

Aclaración: Un tablero de 5×5 tiene exactamente 18 diagonales de diferentes tamaños. En particular, las esquinas son diagonales de tamaño 1.

XXV Olimpiada (2019)

1.1 Hallar todos los números de dos dígitos $\overline{ab}$ que elevados al cuadrado dan un resultado donde los dos últimos dígitos son $\overline{ab}$.

1.2 En un torneo de ajedrez participaron más de cinco competidores. Cada competidor jugó exactamente una vez contra cada uno de los otros competidores. Cinco de los competidores perdieron exactamente dos juegos. Todos los demás competidores ganaron, cada uno, exactamente tres juegos. No hubo empates en el torneo. Determinar cuántos competidores hubo y mostrar un torneo que verifique todas las condiciones.

1.3 Gus tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15 números distintos de 15. Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Gus.

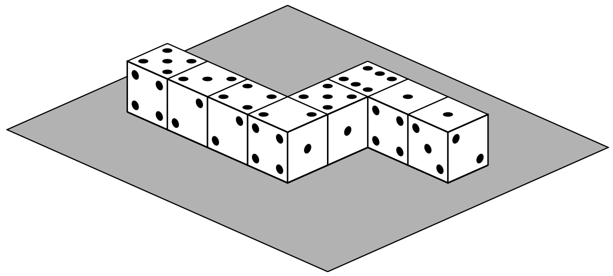
1.4 Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes, mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar como cortar el cuadrado y como armar el triángulo con las tres partes.

Nota: Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos mide más de $90°$.

1.5 Se tiene un tablero de tres filas y 2019 columnas. En la primera fila están escritos los números enteros de 1 a 2019 inclusive, ordenados de menor a mayor. En la segunda fila, Ana escribe esos mismos números pero ordenados a su elección. En cada casilla de la tercera fila se escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna (el mayor menos el menor). Beto tiene que pintar algunos números de la tercera fila de manera que la suma de los números pintados sea igual a la suma de los números de esa fila que quedaron sin pintar. ¿Puede Ana completar la segunda fila de manera que Beto no logre su objetivo?

XXVI Olimpiada (2020)

1.1 Sofía ubica los dados sobre una mesa como se muestra en la figura, juntando caras que tienen el mismo número en cada dado. Ella da vueltas alrededor de la mesa sin tocar los dados. ¿Cuál es la suma de los números de todas las caras que no puede ver?



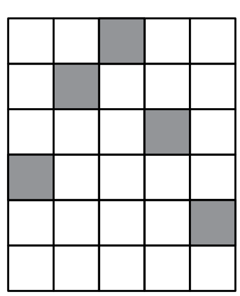
Nota. En todo dado los números de las caras opuestas suman 7.

1.2 Pablo escribió la lista de todos los números de cuatro dígitos tales que el dígito de las centenas es 5 y el dígito de las decenas es 7. Por ejemplo, 1573 y 7570 están en la lista de Pablo, pero 2754 y 571 no. Calcular la suma de todos los números de la lista de Pablo.

Nota. Los números de la lista de Pablo no pueden empezar con cero.

1.3 Una hormiga despistada hace el siguiente recorrido: comenzando en el punto A va 1 cm al norte, después 2 cm al este, a continuación 3 cm al sur, luego 4 cm al oeste, de inmediato 5 cm al norte, continúa 6 cm al este, y así sucesivamente, finalmente 41 cm al norte y termina en el punto B. Calcular la distancia entre A y B (en línea recta).

1.4 María tiene un tablero de 6×5 con algunas casillas sombreadas, como en la figura. Ella escribe, en algún orden, los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 en la primera fila y luego completa el tablero de la siguiente manera: mira el número escrito en la casilla sombreada y escribe el número que ocupa la posición indicada por la casilla sombreada como último número de la fila siguiente, y repite los demás números en las primeras cuatro casillas, siguiendo el mismo orden que tenían en la fila anterior. Por ejemplo, si escribió 2 3 4 1 5 en la primera fila, entonces como en la casilla sombreada está el 4, el número que ocupa el cuarto lugar (el 1) lo escribe en la última casilla de la segunda fila y la completa con los restantes números en el orden en que estaban. Queda: 2 3 4 5 1. Luego, para completar la tercera fila, como en la casilla sombreada está el 3, el número ubicado en el tercer lugar (el 4) lo escribe en la última casilla y obtiene 2 3 5 1 4. Siguiendo de la misma manera obtiene el tablero de la figura. Mostrar una manera de ubicar los números en la primera fila para obtener en la última fila los números 2 4 5 1 3.



2	3	4	1	5
2	3	4	5	1
2	3	5	1	4
3	5	1	4	2
3	5	4	2	1
5	4	2	1	3

1.5 Sobre una mesa hay varias cartas, algunas boca arriba y otras boca abajo. La operación permitida es elegir 4 cartas y darles vuelta. El objetivo es obtener todas las cartas en el mismo estado (todas boca arriba o todas boca abajo). Determinar si es posible lograr el objetivo mediante una secuencia de operaciones permitidas si inicialmente hay:

(a) 101 cartas boca arriba y 102 boca abajo;

(b) 101 cartas boca arriba y 101 boca abajo.

XXVII Olimpiada (2021)

1.1 En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E que se encuentran en ese orden sobre una línea recta. En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

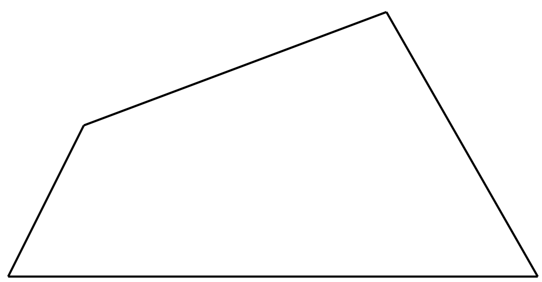
1.2 En un tablero cuadriculado de 2×8 se desea colorear cada casilla de rojo o azul de modo tal que en cada subtablero de 2×2 haya al menos 3 casillas pintadas de azul. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta coloración?

Aclaración: Un subtablero de 2×2 es un cuadrado formado por 4 casillas que tienen un vértice común.

1.3 En un año que tiene 365 días, ¿cuál es la máxima cantidad de "martes 13" que puede haber?

Aclaración: Los meses de abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días cada uno; febrero tiene 28 y todos los demás tienen 31 días.

1.4 A Facundo y Luca les han regalado un pastel que tiene la forma del cuadrilátero de la figura.



Van a hacer dos cortes rectos sobre el pastel obteniendo así 4 porciones con forma de cuadrilátero. Luego Facundo se quedará con dos porciones que no comparten ningún lado; las otras dos serán para Luca. Indicar cómo pueden hacer los cortes para que ambos niños reciban la misma cantidad de pastel. Justificar por qué cortando de esa manera se logra el objetivo.

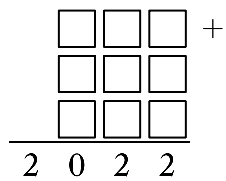
1.5 Beto escribió 36 enteros positivos consecutivos en el pizarrón. Calculó la suma de los dígitos de los 16 números más pequeños y escribió el resultado en color azul. Luego calculó la suma de todos los dígitos de los 10 números más grandes y escribió el resultado en color rojo. ¿Es posible que el número azul sea menor o igual que el número rojo? Si la respuesta es sí, mostrar cuáles pueden ser los números que escribió Beto; si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

XXVIII Olimpiada (2022)

1.1 Esta mañana a Emi se le cayó su reloj y a partir de ese momento comenzó a avanzar más lentamente. Cuando según el reloj pasaron 2 minutos, en realidad ya pasaron 3. Ahora son las 18:25 y el reloj dice que son las 15:30. ¿A qué hora se le cayó el reloj a Emi?

1.2 Beto eligió seis de los nueve dígitos del 1 al 9 y escribió la lista, ordenada de menor a mayor, de todos los números de tres dígitos distintos que se pueden formar usando los dígitos que eligió. En la lista de Beto, el número 317 aparece en la posición 22. ¿Qué número aparece en la posición 60 de la lista de Beto? Dar todas las posibilidades.

1.3 Elegir nueve de los dígitos del 0 al 9 y colocarlos en los casilleros de la figura de manera que no haya dígitos repetidos y la suma indicada sea correcta.



¿Qué dígito quedó sin utilizar? ¿Es posible completar los casilleros para que el dígito que quede sin utilizar sea otro?

1.4 Ana y Bruno tienen un tablero cuadriculado de 8×8. Ana pinta cada una de las 64 casillas con algún color. Después Bruno elige dos filas y dos columnas del tablero y mira las 4 casillas donde se cruzan. El objetivo de Bruno es que estas 4 casillas sean del mismo color. ¿Cuántos colores como mínimo debe usar Ana para que Bruno no pueda cumplir su objetivo? Mostrar cómo puede pintar el tablero con esa cantidad de colores y explicar por qué si usa menos colores entonces Bruno siempre puede cumplir su objetivo.

1.5 Vero tenía un triángulo isósceles de papel. Usando una tijera, lo dividió en tres triángulos más pequeños y los pintó de azul, rojo y verde. Una vez hecho esto, observó que:

- con el triángulo azul y el triángulo rojo se puede formar un triángulo isósceles;
- con el triángulo azul y el triángulo verde se puede formar un triángulo isósceles;
- con el triángulo rojo y el triángulo verde se puede formar un triángulo isósceles.

Mostrar cómo puede haber sido el triángulo de Vero y cómo puede haber hecho los cortes para que esta situación sea posible.

XXIX Olimpiada (2023)

1.1 Juanita escribió los números del 1 al 13, calculó la suma de todos los dígitos escritos y obtuvo

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+(1+0)+(1+1)+(1+2)+(1+3)=55.$$

Su hermano Ariel escribió los números del 1 al 100 y calculó la suma de todos los dígitos escritos. Hallar el valor de la suma de Ariel.

1.2 Decimos que un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ es ***cabuloso*** si el número $a^4+b^3+c^2+d$ es igual al número de dos dígitos $\overline{cd}$. Por ejemplo, 2023 es cabuloso, pues $2^4+0^3+2^2+3=23$. ¿Cuántos números cabulosos hay?

Aclaración. a^4 es el resultado de multiplicar 4 veces el número a, por ejemplo $3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$.

1.3 Sobre una recta ℓ hay cuatro puntos A, B, C, D en ese orden tales que $AB=BC=CD$. Se elige un punto E fuera de la rectaℓ de modo que al trazar los segmentos EB y EC se forme un triángulo equilátero EBC. A continuación se trazan los segmentos EA y ED y se elige un punto F de modo que al trazar los segmentos FA y FE se forme un triángulo equilátero FAE exterior al triángulo EAD. Por último se trazan las rectas EB y FA, que se intersecan en el punto G. Si el área del triángulo EBD es 10, calcular el área del triángulo EFG.

1.4 Se tiene un tablero de tres filas y 2023 columnas. En la primera fila están escritos los números desde 1 hasta 2023, ordenados de menor a mayor. El diablo de los números escribe esos mismos números en las casillas de la segunda fila, pero ordenados a su elección. Después, en cada casilla de la tercera fila escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si en las primeras dos casillas de una columna están los números 21 y 198, en la tercera casilla se escribe $198-21=177$. Explicar por qué, sin importar cómo haya completado el diablo la segunda fila del tablero, nunca ocurrirá que al multiplicar los 2023 números de la tercera fila el resultado sea impar.

1.5 Se tienen 100 cajas que se etiquetaron con los números 00, 01, 02, ..., 99. En mil tarjetas se escribieron los números 000, 001, 002, ..., 999, uno en cada tarjeta. Está permitido colocar una tarjeta en una caja si el número de la caja se puede obtener al eliminar uno de los dígitos del número de la tarjeta. Por ejemplo, está permitido colocar la tarjeta 037 en la caja 07, pero no está permitido colocar la tarjeta 156 en la caja 65. ¿Puede ocurrir que luego de colocar todas las tarjetas en las cajas, haya exactamente 50 cajas vacías? Si la respuesta es sí, indicar cómo se colocan las tarjetas en las cajas; si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

XXX Olimpiada (2024)

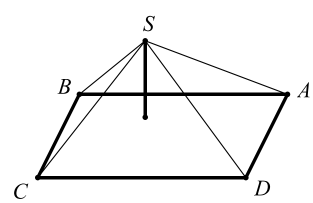
1.1 Hallar todos los números de dos cifras que cumplen la siguiente condición: si multiplicamos sus dos cifras, el resultado es igual a la mitad del número. Por ejemplo, 24 **no** cumple la condición, porque $2 \cdot 4 = 8$ y 8 no es la mitad de 24.

1.2 Un número es *especial* si su cifra de las decenas es un 9. Por ejemplo, 499 y 1092 son especiales, pero 509 no lo es. Diego tiene varias tarjetas. En cada una de ellas escribió un número especial (puede escribir el mismo número en más de una tarjeta). Al sumar los números de las tarjetas, el resultado es 2024. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que puede tener Diego?

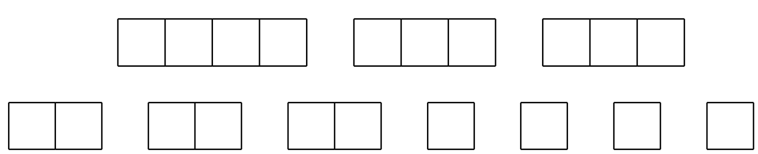
Dar un ejemplo con esa cantidad de tarjetas y explicar por qué con menos tarjetas es imposible que la suma sea igual a 2024.

1.3 Beto tiene un tablero cuadriculado en el que la cantidad de filas y la cantidad de columnas son números consecutivos (por ejemplo, 30 y 31). Ana tiene fichas rectangulares de dos colores y tamaños diferentes: las fichas rojas son de 5×7 y las fichas azules son de 3×5. Ana se dio cuenta de que ella puede cubrir todas las casillas del tablero de Beto usando únicamente fichas rojas, que se pueden girar, pero no superponerse ni salirse del tablero. Después, se dio cuenta de que también puede hacer lo mismo usando únicamente fichas azules. ¿Cuál es la mínima cantidad de casillas que puede tener el tablero de Beto?

1.4 Un náufrago está construyendo una balsa rectangular $ABCD$. Fija un mástil perpendicular a la balsa con sogas que pasan por el extremo de arriba del mástil (el punto S de la figura) y van a las cuatro esquinas de la balsa. La soga SA mide 8 metros, la soga SB mide 2 metros y la soga SC mide 14 metros. Calcular la longitud de la soga SD.



1.5 La batalla naval se juega en un tablero cuadriculado de 10×10. Una *flota* consta de 10 "barcos": uno que ocupa 4 casillas del tablero, dos que ocupan 3 casillas, tres que ocupan 2 casillas y cuatro que ocupan 1 casilla (ver figura). Los barcos se pueden colocar en posición horizontal o vertical, pero no está permitido que dos barcos se toquen, ni siquiera en una esquina. ¿Se puede, respetando las reglas, colocar dos flotas en el mismo tablero?

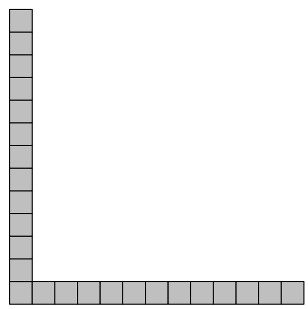


XXXI Olimpiada (2025)

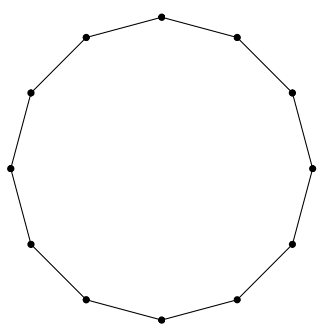
1.1 En la siguiente multiplicación hay que reemplazar cada letra por un dígito, de modo que letras iguales correspondan a dígitos iguales y la multiplicación resulte correcta. Dar todas las posibilidades.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\times \\ 9 \\ \hline a\ c\ b\ c \end{array}$$

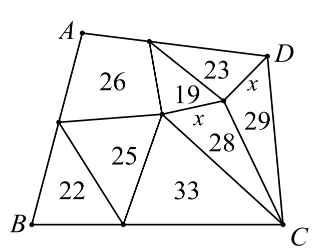
1.2 La figura está compuesta por 25 cuadrados de 1×1, dispuestos en una sola pieza. Un corte solo puede realizarse a lo largo de una de las líneas de la cuadrícula. Hallar el número mínimo de cortes que se deben hacer para que, con todas las piezas resultantes, se pueda formar un cuadrado de 5×5. Indicar cómo se arma el cuadrado y explicar por qué no se puede hacer con menos cortes.



1.3 En cada vértice de este polígono de 12 lados hay que escribir un número entero positivo de modo que se cumpla la siguiente condición: siempre que se suma un número con sus dos números vecinos el resultado es igual a 31. Los números se pueden repetir. ¿De cuántas maneras se puede hacer?



1.4 El cuadrilátero $ABCD$ de la siguiente figura está dividido en 7 triángulos y 1 cuadrilátero. El número que aparece en el interior de cada figura indica su perímetro. Además, los dos lados marcados con x tienen la misma longitud. Calcular el perímetro del cuadrilátero $ABCD$.



1.5 Inicialmente, en la pizarra está escrito el número 3. Ana y Beto juegan por turnos y empieza Ana. En cada turno hay que escribir un número entero que sea mayor que el último número escrito y menor o igual que el cuadrado del último número escrito. Por ejemplo, en su primer turno Ana puede escribir 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Gana el juego quien logre escribir el número 1000000. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia que le asegura ganar el juego, sin importar cómo juegue su oponente. Describir dicha estrategia.