
Problemas de la Olimpiada Iraní de Geometría

(Nivel Intermedio)

2014 - 2024

Juan Neyra Faustino

Fecha de edición y traducción: Diciembre 2024



Primera Olimpiada (2014)

1. En un triángulo rectángulo ABC tenemos $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Denote por $\mathcal{C}$ a la circunferencia que pasa a través del vértice A la cual es tangente a BC en su punto medio. Asume que $\mathcal{C}$ interseca a AC y a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en N y M , respectivamente. Demuestre que $MN \perp BC$.
2. En un cuadrilátero $ABCD$ tenemos $\angle B = \angle D = 60^\circ$. Considere la recta la cual se dibuja desde M , el punto medio de AD , paralela a CD . Asumamos que esta recta interseca a BC en P . Un punto X se encuentra en CD tal que $BX = CX$. Demuestre que $AB = BP$ si y solo si $\angle MXB = 60^\circ$.
3. Dado un triángulo acutángulo ABC . La circunferencia con diámetro BC interseca a AB , AC en E , F , respectivamente. Sea M el punto medio de BC y P el punto de intersección de AM y EF . X es un punto en el arco EF y Y el segundo punto de intersección de XP con la circunferencia mencionada anteriormente. Muestre que $\angle XAY = \angle XYM$.
4. La recta tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo acutángulo ABC ($AC > AB$) en A interseca a la continuación de BC en P . Denotemos por O el circuncentro de ABC . X es un punto en OP tal que $\angle AXP = 90^\circ$. Dos puntos E , F respectivamente en AB , AC en el mismo lado de OP son escogidos de manera que

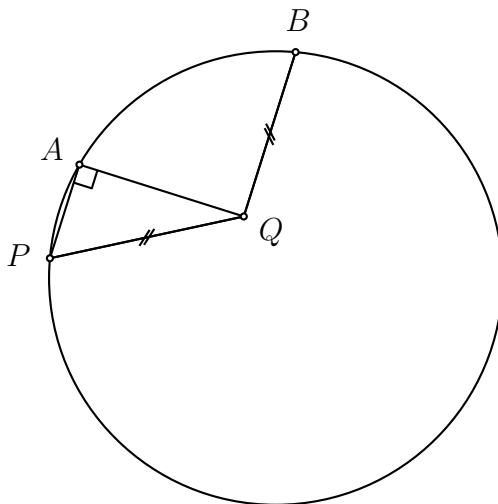
$$\angle EXP = \angle ACX, \quad \angle FXO = \angle ABX.$$

Si K , L denotan a los puntos de intersección de EF con la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$, muestre que OP es tangente a la circunferencia circunscrita del $\triangle K LX$.

5. Dos puntos P , Q se encuentran en el lado BC del triángulo ABC y tienen la misma distancia al punto medio. Las perpendiculares desde P , Q hacia BC inteseentan a AC , AB en E , F , respectivamente. Sea M el punto de intersección de PF y EQ . Si H_1 y H_2 denotan al ortocentro del $\triangle BFP$ y $\triangle CEQ$, muestre que $AM \perp H_1H_2$.

Segunda Olimpiada (2015)

1. En la figura de abajo, los puntos P, A, B se encuentran en una circunferencia. El punto Q se encuentra en el interior de la circunferencia de modo que $\angle PAQ = 90^\circ$ y $PQ = BQ$. Demuestre que la resta $\angle AQB$ menos $\angle PQA$ es igual al arco AB .



2. En el triángulo acutángulo ABC , BH es la altura desde el vértice B . Los puntos D y E son puntos medios de AB y AC , respectivamente. Supongamos que F es la reflexión de H en ED . Demuestre que la recta BF pasa por el circuncentro del $\triangle ABC$.
3. En el triángulo ABC , los puntos M, N, K son los puntos medios de BC, AC, AB respectivamente. Sean ω_B y ω_C dos semicircunferencias con diámetro AC y AB fuera del triángulo respectivamente. Suponga que MK y MN intersecan a ω_C y ω_B en X y Y , respectivamente. Si el punto Z es la intersección de la tangente a ω_C y ω_B en X y Y respectivamente, demuestre que $AZ \perp BC$.
4. Suponga que ABC es el triángulo equilátero con circunferencia circunscrita ω y circuncentro O . Sea P el punto en el arco BC (el arco en el cual A no está). La recta tangente a ω en P interseca a la extensión de AB y AC en K y L , respectivamente. Muestre que $\angle KOL > 90^\circ$.
5. (a) ¿Existen 5 circunferencias en el plano de manera que cada circunferencia pase exactamente a través del centro de 3 de otras circunferencias?
(b) ¿Existen 6 circunferencias en el plano de manera que cada circunferencia pase exactamente a través del centro de 3 de otras circunferencias?

Tercera Olimpiada (2016)

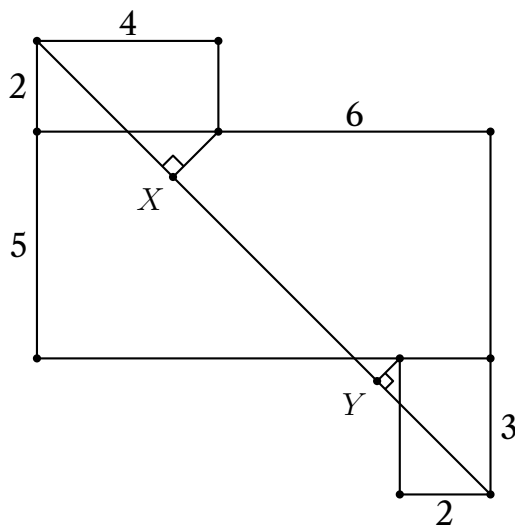
1. En un trapecio $ABCD$ con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros AD y BC , respectivamente. Sean X y Y dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 , respectivamente. Demuestre que la longitud del segmento XY no es mayor que la mitad del perímetro de $ABCD$.
2. Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en A y B . La tangente a C_1 en A interseca a C_2 en P y la recta PB interseca a C_1 por segunda vez en Q (suponga que Q está afuera de C_2). Una tangente a C_2 que pasa por Q interseca a C_1 y C_2 en C y D , respectivamente (los puntos A y D están en diferentes semiplanos determinados por la recta PQ). Demuestre que AD es bisectriz del ángulo CAP .
3. Halle todos los enteros positivos N para los cuales existe un triángulo que puede ser particionado en N cuadriláteros semejantes.
4. Sea ω la circunferencia circunscrita del triángulo rectángulo ABC ($\angle A = 90^\circ$). La tangente a ω por A interseca a la recta BC en el punto P . Suponga que M es el punto medio del menor arco AB , y que PM interseca a ω por segunda vez en Q . La tangente a ω por Q interseca a la recta AC en K . Demuestre que $\angle PKC = 90^\circ$.
5. Las circunferencias ω y ω' se intersecan en A y B . La tangente a ω por A interseca a ω' en C y la tangente a ω' por A interseca a ω en D . Suponga que la bisectriz interior del ángulo CAD interseca a ω y ω' en E y F , respectivamente, y la bisectriz exterior del ángulo CAD interseca a ω y ω' en X y Y , respectivamente. Demuestre que la mediatriz de XY es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo BEF .

Cuarta Olimpiada (2017)

1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle A = 60^\circ$. Sean E y F los pies de las alturas desde B y C , respectivamente. Demuestre que $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.
2. Dos circunferencias ω_1, ω_2 se intersecan en A y B . Una recta arbitraria que pasa por B interseca a ω_1 y ω_2 en C y D , respectivamente. Sean E y F dos puntos sobre ω_1 y ω_2 , respectivamente, tales que $CE = CB$ y $BD = DF$. Suponga que BF interseca a ω_1 en P , y BE interseca a ω_2 en Q . Demuestre que A, P y Q son colineales.
3. Se tiene n puntos en el plano ($n > 2$), donde no hay tres de ellos colineales. Para cada par de puntos, se dibuja la recta que pasa por ellos, y entre los otros $n - 2$ puntos, se marca el punto más cercano a esta recta (considere que en cada caso este punto es único). ¿Cuál es el máximo número posible de puntos marcados para cada n ?
4. En el triángulo isósceles ABC ($AB = AC$), sea ℓ la recta paralela a BC que pasa por A . Sea D un punto arbitrario en ℓ . Sean E y F los pies de las perpendiculares desde A sobre BD y CD , respectivamente. Suponga que P y Q son los pies de las perpendiculares desde E y F , respectivamente, sobre ℓ . Demuestre que $AP + AQ \leq AB$.
5. Sean X y Y dos puntos sobre el lado BC del triángulo ABC tales que $2XY = BC$ (X está entre B y Y). Sea AA' el diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo AXY . Sean P el punto de intersección de AX con la perpendicular desde B a BC , y Q el punto de intersección de AY con la perpendicular desde C a BC . Demuestre que la recta tangente desde A' a la circunferencia circunscrita de AXY pasa por el circuncentro del triángulo APQ .

Quinta Olimpiada (2018)

- Hay tres rectángulos en la siguiente figura. Se muestran las longitudes de algunos segmentos. Halle la longitud del segmento XY .



- En el cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales AC y BD se intersecan en el punto P . Sabemos que $\angle DAC = 90^\circ$ y $2\angle ADB = \angle ACB$. Si tenemos $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ$, demuestre que $2AP = BP$.
- Sean ω_1, ω_2 dos circunferencias con centros O_1 y O_2 , respectivamente. Estas dos circunferencias se intersecan entre sí en los puntos A y B . La recta O_1B interseca a ω_2 por segunda vez en el punto C , y la recta O_2A interseca a ω_1 por segunda vez en el punto D . Sea X el segundo punto de intersección de AC y ω_1 . Sea Y el segundo punto de intersección de BD y ω_2 . Demuestre que $CX = DY$.
- Tenemos un poliedro cuyas caras son triángulos. Sea P un punto arbitrario en uno de los lados de este poliedro, de manera que P no sea el punto medio o extremo de este lado. Asume que $P_0 = P$. En cada paso, conecte P_i al baricentro de una de las caras que lo contiene. Esta recta interseca al perímetro de esta cara nuevamente en el punto P_{i+1} . Continuar este proceso con P_{i+1} y la otra cara que contiene a P_{i+1} . Demuestre que al continuar este proceso, no podemos pasar a través de todas las caras. (El baricentro de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas).
- Supongamos que $ABCD$ es un paralelogramo tal que $\angle DAC = 90^\circ$. Sea H el pie de la perpendicular desde A a DC , también sea P un punto a lo largo de la recta AC , de modo que la recta PD sea tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABD . Demuestre que $\angle PBA = \angle DBH$.

Sexta Olimpiada (2019)

1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 con centros O_1 y O_2 respectivamente se intersecan entre sí en los puntos A y B , y el punto O_1 se encuentra en ω_2 . Sea P un punto arbitrario que se encuentra en ω_1 . Las rectas BP , AP y O_1O_2 intersecan a ω_2 por segunda vez en los puntos X , Y y C , respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero $XPYC$ es un paralelogramo.
2. Encuentre todos los cuadriláteros $ABCD$ de modo que los cuatro triángulos DAB , CDA , BCD y ABC sean semejantes entre sí.
3. Tres circunferencias ω_1 , ω_2 y ω_3 pasan por un punto común, digamos P . La recta tangente a ω_1 en P interseca a ω_2 y ω_3 por segunda vez en los puntos $P_{1,2}$ y $P_{1,3}$, respectivamente. Los puntos $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ y $P_{3,2}$ se definen de manera similar. Demuestre que las mediatrices de los segmentos $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ y $P_{3,1}P_{3,2}$ son concurrentes.
4. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea K un punto en la recta AD tal que $BK = AB$. Suponga que P es un punto arbitrario en AB y que la mediatriz de PC interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo APD en los puntos X , Y . Demuestre que la circunferencia circunscrita del triángulo ABK pasa por el ortocentro del triángulo AXY .
5. Sea ABC un triángulo con $\angle A = 60^\circ$. Los puntos E y F son el pie de las bisectrices de los vértices B y C respectivamente. Los puntos P y Q se consideran tales que los cuadriláteros $BFPE$ y $CEQF$ son paralelogramos. Demuestre que $\angle PAQ > 150^\circ$. (Considere el ángulo PAQ que no contiene el lado AB del triángulo).

Séptima Olimpiada (2020)

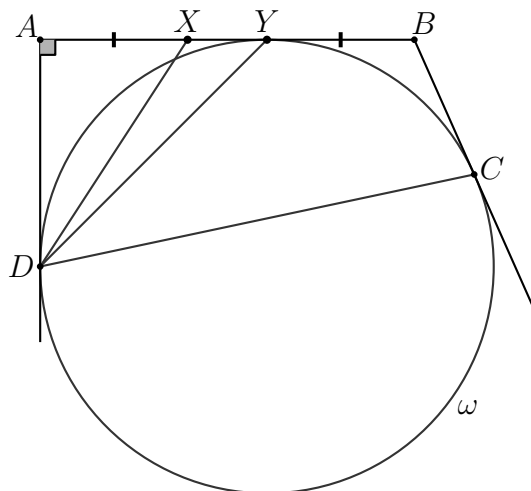
1. Dado un trapecio $ABCD$ donde AB y CD son paralelos. Sea M el punto medio del segmento AB . El punto N está ubicado en el segmento CD de manera que $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ y $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Demuestre que N es el punto medio del segmento CD .
2. Sea ABC un triángulo isósceles ($AB = AC$) con su circuncentro O . El punto N es el punto medio del segmento BC y el punto M es la reflexión del punto N con respecto al lado AC . Suponga que T es un punto, de modo que $ANBT$ es un rectángulo. Demuestre que $\angle OMT = \frac{1}{2}\angle BAC$.
3. En el triángulo acutángulo ABC ($AC > AB$), el punto H es el ortocentro y el punto M es el punto medio del segmento BC . La mediana AM interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en X . La recta CH interseca a la mediatriz de BC en E y a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC nuevamente en F . El punto J se encuentra en la circunferencia ω , que pasa a través de X , E y F , de modo que $BCHJ$ es un trapecio ($CB \parallel HJ$). Demuestre que JB y EM se intersecan en ω .
4. Dado el triángulo ABC . Una circunferencia arbitraria con centro J , que pasa por B y C , interseca los lados AC y AB en E y F , respectivamente. Sea X un punto tal que el triángulo FXB es semejante al triángulo EJC (con el mismo orden) y los puntos X y C se encuentran en el mismo lado de la recta AB . De manera similar, sea Y un punto tal que el triángulo EYC sea semejante al triángulo FJB (con el mismo orden) y los puntos Y y B estén en el mismo lado de la recta AC . Demuestre que la recta XY pasa por el ortocentro del triángulo ABC .
5. Encuentre todos los números $n \geq 4$ tales que exista un poliedro convexo con exactamente n caras, cuyas caras sean triángulos rectángulos. (Tenga en cuenta que el ángulo entre cualquier par de caras adyacentes en un poliedro convexo es menor de 180°).

Octava Olimpiada (2021)

1. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Sea H el ortocentro de ABC . El punto E es el punto medio de AC y el punto D está en el lado BC tal que $3CD = BC$. Demuestre que $BE \perp HD$.
2. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Los puntos E, F se encuentran en los lados AB, CD respectivamente, tales que $\angle EDC = \angle FBC$ y $\angle ECD = \angle FAD$. Demuestre que $AB \geq 2BC$.
3. Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$ con $AB = BC$ y $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Sea el punto E la intersección de las diagonales AC y BD . El punto F está en el lado AD tal que $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. La circunferencia ω con diámetro DF y la circunferencia circunscrita del triángulo ABF se intersecan por segunda vez en el punto K . El punto L es la segunda intersección de EF y ω . Demuestre que la recta KL pasa por el punto medio de CE .
4. Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno de incentro I y circunferencia circunscrita Γ . La recta AI interseca a Γ por segunda vez en M . Sean N el punto medio de BC y T el punto sobre Γ tal que $IN \perp MT$. Finalmente, sean P y Q los puntos de intersección de TB y TC , respectivamente, con la recta perpendicular a AI en I . Demuestre que $PB = CQ$.
5. Considere un pentágono convexo $ABCDE$ y un punto variable X en su lado CD . Suponga que los puntos K, L se encuentran en el segmento AX tales que $AB = BK$ y $AE = EL$ y que las circunferencias circunscritas de los triángulos CXK y DXL se intersecan por segunda vez en Y . Haciendo variar X , demuestre que todas esas rectas XY pasan por un punto fijo, o son todas paralelas.

Novena Olimpiada (2022)

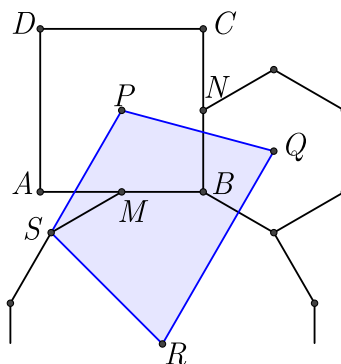
1. En la siguiente figura tenemos $AX = BY$. Demuestre que $\angle XDA = \angle CDY$.



2. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 con igual radio se intersecan en dos puntos E y X . Los puntos arbitrarios C y D pertenecen a ω_1 y ω_2 , respectivamente. Las rectas paralelas a XC y XD desde E intersecan a ω_2 y ω_1 en A y B , respectivamente. Supongamos que CD interseca a ω_1 y ω_2 nuevamente en P y Q , respectivamente. Demuestre que $ABPQ$ es cíclico.
3. Sea O el circuncentro del triángulo ABC . Los puntos arbitrarios M y N se encuentran en los lados AC y BC , respectivamente. Los puntos P y Q se encuentran en el mismo semiplano que el punto C con respecto a la recta MN y satisfacen $\triangle CMN \sim \triangle PAN \sim \triangle QMB$ (exactamente en ese orden). Demuestre que $OP = OQ$.
4. Llamamos a dos polígonos simples P y Q *compatibles* si existe un entero positivo k tal que cada uno de los polígonos P y Q se puede dividir en k polígonos congruentes que son semejantes al otro polígono. Demuestre que para cada dos enteros **pares** $m, n \geq 4$, hay dos polígonos compatibles con m y n lados.
(Un polígono simple es un polígono que no se interseca a sí mismo).
5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω con centro O . Sea P la intersección de las diagonales AC y BD . Sea Q un punto del segmento OP . Sean E y F las proyecciones ortogonales de Q sobre las rectas AD y BC , respectivamente. Los puntos M y N se encuentran en la circunferencia circunscrita del triángulo QEF de modo que $QM \parallel AC$ y $QN \parallel BD$. Demuestre que las dos rectas ME y NF se intersecan en la mediatriz del segmento CD .

Décima Olimpiada (2023)

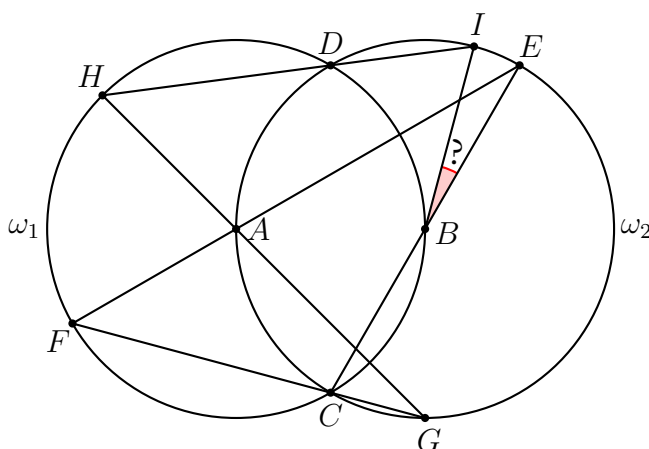
1. Los puntos M y N son los puntos medios de los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$. Según la figura, hemos dibujado un hexágono regular y un 12-ágono regular. Los puntos P , Q y R son los centros de estos tres polígonos. Demuestre que $PQRS$ es un cuadrilátero cíclico.



2. Dado un hexágono convexo $ABCDEF$ con un punto interior P . Supongamos que $BCEF$ es un cuadrado y que tanto ABP como PCD son triángulos rectángulos isósceles con ángulos rectos en B y C , respectivamente. Las rectas AF y DE se intersectan en G . Demuestre que GP es perpendicular a BC .
3. Sea ω la circunferencia circunscrita del triángulo ABC con $\angle B = 3\angle C$. La bisectriz del ángulo interno de A , interseca a ω y BC en M y D , respectivamente. El punto E se encuentra en la recta MC de modo que M está entre C y E , y ME es igual al radio de ω . Demuestre que las circunferencias circunscritas de los triángulos ACE y BDM son tangentes.
4. Sea ABC un triángulo y sea P el punto medio del arco BAC de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC con ortocentro H . Sean Q y S puntos tales que $HAPQ$ y $SACQ$ son paralelogramos. Sea T el punto medio de AQ y sea R el punto de intersección de las rectas SQ y PB . Demuestre que AB , SH y TR son concurrentes.
5. Hay n puntos en el plano que cumplen que al menos el 99% de los cuadriláteros con vértices en estos puntos son convexos. ¿Podemos encontrar un polígono convexo en el plano que tenga al menos el 90% de estos puntos como sus vértices?

Undécima Olimpiada (2024)

1. En la siguiente figura los puntos A, B son los centros de las circunferencias ω_1, ω_2 , respectivamente. Los puntos C, B y E son colineales; los puntos E, A y F son colineales; los puntos F, C y G son colineales; los puntos G, A y H son colineales; y los puntos H, D y I son colineales. Halle la medida del ángulo IBE .



2. Los puntos X, Y se encuentran en el lado CD de un pentágono convexo $ABCDE$ con X entre Y y C . Suponga que los triángulos XCB, ABX, AXY, AYE y YED son todos semejantes (en este orden exacto). Demuestre que las circunferencias circunscritas de los triángulos ACD y AXY son tangentes.
3. Sea ABC un triángulo acutángulo con un punto D en el lado BC . Sea J un punto en el lado AC tal que $\angle BAD = 2\angle ADJ$, y sea ω la circunferencia circunscrita del triángulo CDJ . La recta AD interseca a ω nuevamente en un punto P , y Q es el pie de la altura desde J hacia AB . Demuestre que si $JP = JQ$, entonces la recta perpendicular a DJ que pasa por A es tangente a ω .
4. Eric ha armado un polígono convexo P a partir de una cantidad finita de mosaicos poligonales simétricos centralmente (no necesariamente congruentes o convexos). Demuestre que P es simétrico centralmente.
5. El punto P es la intersección de las diagonales AC, BD del trapecio $ABCD$ con $AB \parallel CD$. Las reflexiones de las rectas AD y BC en las bisectrices de los ángulos internos de $\angle PDC$ y $\angle PCD$ intersecan a las circunferencias circunscritas de los triángulos APD y BPC en D' y C' . La recta $C'A$ interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo BPC nuevamente en Y y $D'C$ interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo APD nuevamente en X . Demuestre que P, X y Y son colineales.