Problemas de la Olimpiada Iraní de Geometría

(Nivel Elemental)

2014 - 2024

Juan Neyra Faustino

Fecha de edición y traducción: Diciembre 2024

Primera Olimpiada (2014)

1. En un triángulo rectángulo ABC tenemos $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$. Denote por $\mathcal{C}$ a la circunferencia que pasa a través del vértice A la cual es tangente a BC en su punto medio. Asume que $\mathcal{C}$ interseca a AC y a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en N y M, respectivamente. Demuestre que $MN \perp BC$.

2. La circunferencia inscrita del $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, AC y AB en D, E y F, respectivamente. Denote a los pies de las perpendiculares desde F, E a BC por K, L, respectivamente. Supongamos que la segunda intersección de estas perpendiculares con la circunferencia inscrita son M, N, respectivamente. Muestre que $\frac{S_{\triangle BMD}}{S_{\triangle CND}} = \frac{DK}{DL}$.

3. Cada uno de Mahdi y Morteza ha dibujado un polígono de 93 lados inscrito. Denote al primero por $A_1A_2\ldots A_{93}$ y al segundo por $B_1B_2\ldots B_{93}$. Se sabe que $A_iA_{i+1} \parallel B_iB_{i+1}$ para $1 \le i \le 93$ ($A_{93} = A_1, B_{93} = B_1$). Muestre que $\frac{A_iA_{i+1}}{B_iB_{i+1}}$ es un número constante independiente de i.

4. En un triángulo ABC tenemos que $\angle C = \angle A + 90°$. El punto D en la prolongación de BC es dado tal que $AC = AD$. Un punto E en el semiplano determinado por la recta BC en el cual no está A es escogido de modo que

$$\angle EBC = \angle A, \quad \angle EDC = \frac{1}{2}\angle A.$$

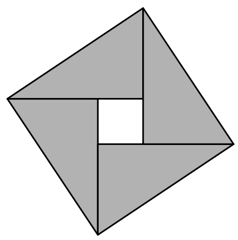
   Demuestre que $\angle CED = \angle ABC$.

5. Dos puntos X, Y se encuentran en el arco BC de la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$ (este arco no contiene a A) de manera que $\angle BAX = \angle CAY$. Supongamos que M denota al punto medio de la cuerda AX. Muestre que $BM + CM > AY$.

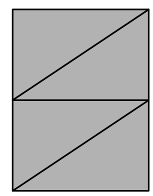
Segunda Olimpiada (2015)

1. Tenemos cuatro triángulos de madera con lados 3, 4, 5 centímetros. ¿Cuántos polígonos convexos podemos hacer con todos estos triángulos? (Solo dibuja los polígonos sin ninguna prueba).

   Un polígono convexo es un polígono cuyos ángulos son menores que $180°$ y no tiene ningún agujero. Por ejemplo:

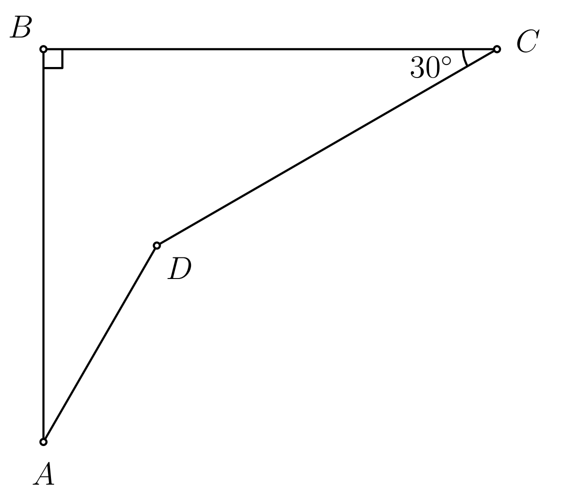
   Este polígono no es convexo.

   Este polígono es convexo.

2. Sea ABC un triángulo con $\angle A = 60°$. Los puntos M, N y K están en BC, CA y AB, respectivamente tales que $BK = KM = MN = NC$. Si $AN = 2AK$, halle los valores de $\angle B$ y $\angle C$.

3. En la figura de abajo, sabemos que $AB = CD$ y $BC = 2AD$. Demuestre que $\angle BAD = 30°$.

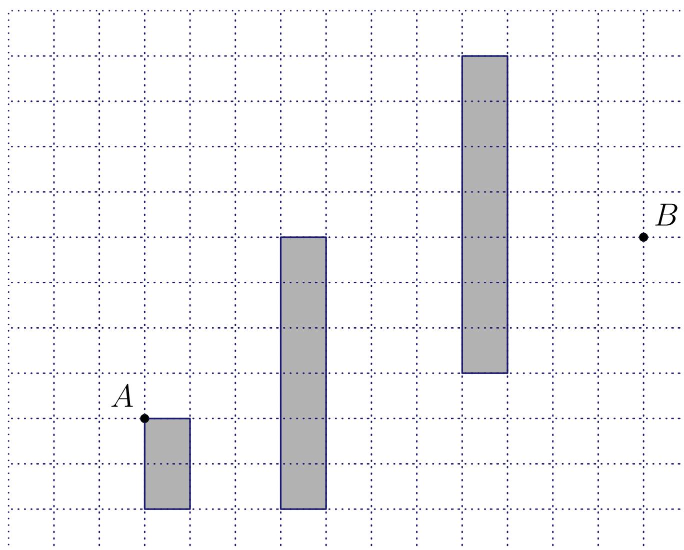
   

4. En el rectángulo $ABCD$, los puntos M, N, P y Q están en AB, BC, CD y DA, respectivamente tales que las áreas de los triángulos AQM, BMN, CNP y DPQ son iguales. Demuestre que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

5. ¿Existen 6 circunferencias en el plano de manera que cada circunferencia pase exactamente a través del centro de 3 de otras circunferencias?

Tercera Olimpiada (2016)

1. Ali quiere moverse del punto A al punto B. No puede caminar dentro de las áreas negras, pero puede moverse en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo las líneas de la cuadrícula sino todo el plano). Ayuda a Ali a encontrar el camino más corto entre A y B. Solo dibuja el camino y escribe su longitud.



2. Sea ω la circunferencia circunscrita del triángulo ABC con $AC > AB$. Sea X un punto en AC y sea Y un punto en la circunferencia ω, tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos A y Y se encuentran en diferentes lados de la recta BC). La recta XY interseca a ω por segunda vez en el punto P. Muestre que $PB = PC$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo en el que no hay dos lados paralelos. Ubicamos los puntos P, Q, R, S tales que $ABCP$, $BCDQ$, $CDAR$ y $DABS$ son paralelogramos. Demuestre que si consideramos los cuatro puntos P, Q, R, S, exactamente uno de ellos está dentro del cuadrilátero $ABCD$.

4. En el triángulo rectángulo ABC ($\angle A = 90°$), la mediatriz de BC interseca a la recta AC en K y la mediatriz de BK interseca a la recta AB en L. Si la recta CL es la bisectriz interior del ángulo C, halle todos los posibles valores de los ángulos B y C.

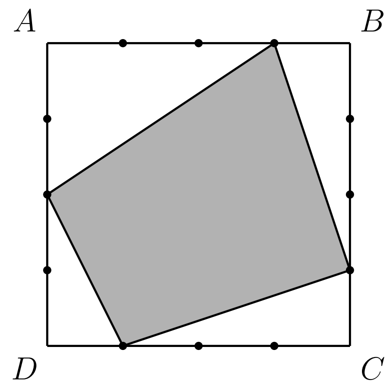
5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle ADC = 135°$ y

$$\angle ADB - \angle ABD = 2\angle DAB = 4\angle CBD.$$

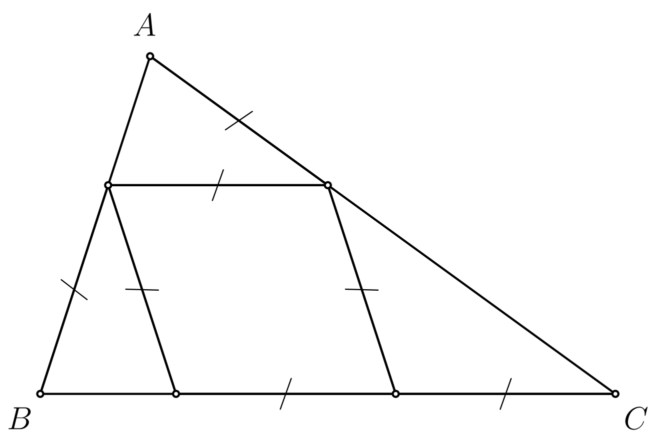
Si $BC = \sqrt{2} \cdot CD$, demuestre que $AB = BC + AD$.

Cuarta Olimpiada (2017)

1. En un cuadrado $ABCD$ cuyos lados tienen longitud 4, cada lado se divide en partes iguales por medio de tres puntos. Escoge uno de los tres puntos en cada lado, y conecta los puntos de manera consecutiva para obtener un cuadrilátero. ¿Cuáles números pueden ser el área del cuadrilátero? Solo escribe los números sin demostración.



2. Halle los ángulos del triángulo ABC.



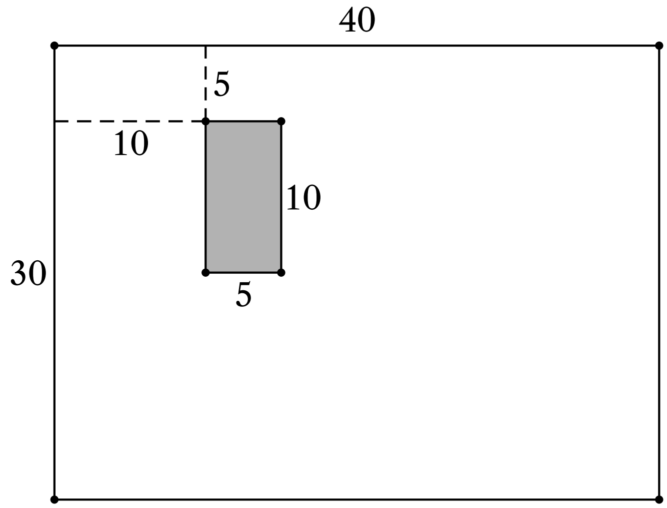
3. En el pentágono regular $ABCDE$, la perpendicular a CD que pasa por C, interseca a AB en F. Demuestre que $AE + AF = BE$.

4. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ cien puntos en el plano, donde no hay tres de ellos colineales. Para cada tres puntos, decimos que el triángulo formado por ellos es ***positivo*** si cuando se leen los nombres de sus vértices desde el que tiene índice más pequeño hasta el que tiene índice más grande, se leen en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Es posible que el número de triángulos positivos sea exactamente 2017?

5. En el triángulo isósceles ABC ($AB = AC$), sea ℓ la recta paralela a BC que pasa por A. Sea D un punto arbitrario en ℓ. Sean E y F los pies de las perpendiculares desde A sobre BD y CD, respectivamente. Suponga que P y Q son los pies de las perpendiculares desde E y F, respectivamente, sobre ℓ. Demuestre que $AP + AQ = AB$.

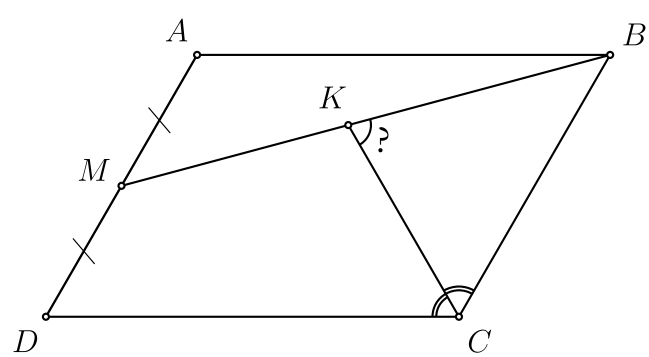
Quinta Olimpiada (2018)

1. Como se muestra a continuación, hay un papel de 40×30 con un rectángulo sombreado de 10×5 en su interior. Queremos recortar el rectángulo sombreado del papel con cuatro cortes rectos. Cada corte recto es una línea recta que divide al papel en dos piezas, y mantenemos la pieza que contiene al rectángulo sombreado. El objetivo es minimizar la longitud total de los cortes rectos. ¿Cómo lograr este objetivo y cuál es esa longitud mínima? Muestre los cortes correctos y escribe la respuesta final. No hay necesidad de probar la respuesta.



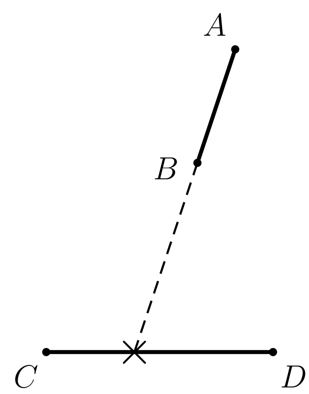
2. El hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ se encuentra en el interior del hexágono convexo $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, de manera que $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, …, $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Demuestre que las áreas de los hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ y $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ son iguales. (Un hexágono simple es un hexágono que no se interseca a sí mismo).

3. En la figura dada, $ABCD$ es un paralelogramo. Se sabe que $\angle D = 60°$, $AD = 2$ y $AB = \sqrt{3} + 1$. El punto M es el punto medio de AD. El segmento CK es la bisectriz de ángulo de C. Halle el ángulo CKB.

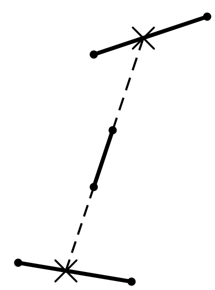


4. Existen dos circunferencias con centros O_1, O_2 que se encuentran dentro de la circunferencia ω y son tangentes a ella. La cuerda AB de ω es tangente a estas dos circunferencias, de manera que se encuentran en lados opuestos de esta cuerda. Demuestre que $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90°$.

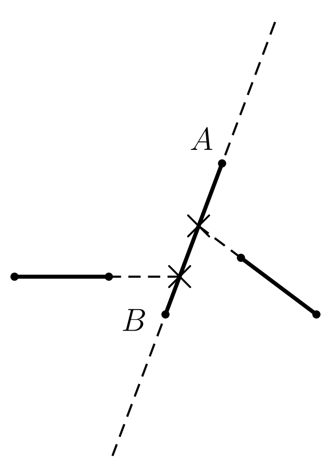
5. Existen algunos segmentos en el plano que no se intersecan entre sí (incluso en los puntos extremos). Decimos que el segmento AB **rompe** al segmento CD si la extensión de AB corta a CD en algún punto entre C y D.



(a) ¿Es posible que cada segmento cuando es extendido desde ambos extremos, rompa a exactamente otro segmento?

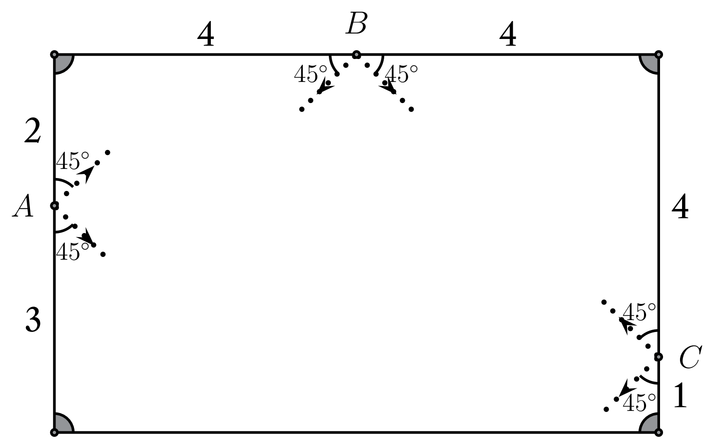


(b) Un segmento se llama *rodeado* si desde ambos lados de él existe exactamente un segmento que lo rompe. (Por ejemplo, el segmento AB en la figura). ¿Es posible que todos los segmentos sean rodeados?

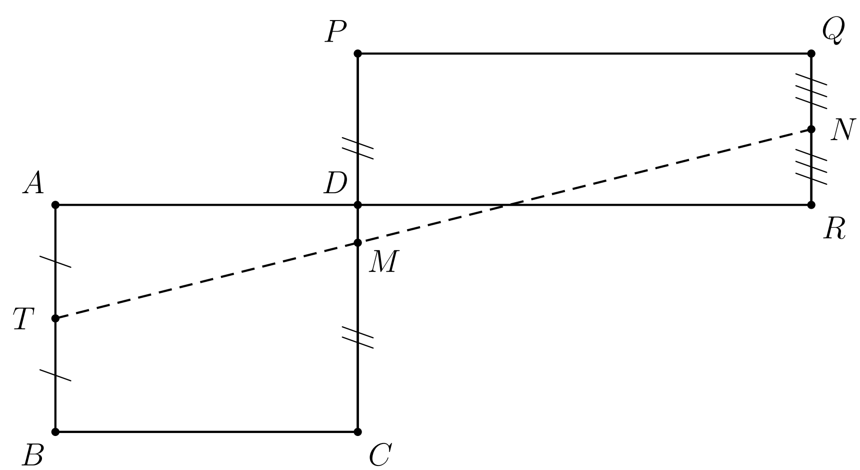


Sexta Olimpiada (2019)

1. Hay una mesa en forma de rectángulo de 8×5 con cuatro agujeros en sus esquinas. Después de lanzar una pelota desde los puntos A, B y C en los caminos mostrados, ¿caerá la pelota en alguno de los agujeros después de 6 reflexiones? (La bola se refleja con el mismo ángulo después de tocar los bordes de la mesa).



2. Como se muestra en la figura, hay dos rectángulos $ABCD$ y $PQRD$ con la misma área y con bordes paralelos correspondientes. Sean los puntos N, M y T los puntos medios de los segmentos QR, PC y AB, respectivamente. Demuestre que los puntos N, M y T se encuentran en la misma recta.



3. Existen $n > 2$ rectas en el plano en posición general; es decir, cualesquiera dos de ellas se intersecan, pero no hay tres concurrentes. Todos sus puntos de intersección son marcados, y luego se eliminan todas las rectas, pero los puntos marcados permanecen. No se sabe qué punto marcado pertenece a qué dos rectas. ¿Es posible saber a qué recta pertenece y restaurarlas a todas?

4. Dado el cuadrilátero $ABCD$ de tal manera que

$$\angle DAC = \angle CAB = 60°,$$

y

$$AB = BD - AC.$$

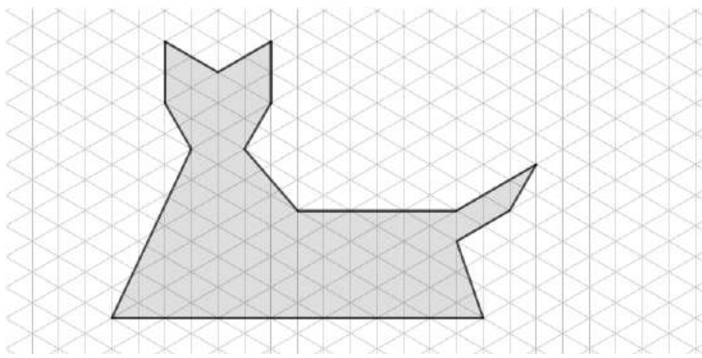
Las rectas AB y CD se intersecan en el punto E. Demuestre que

$$\angle ADB = 2\angle BEC.$$

5. Para un polígono convexo (es decir, todos los ángulos son menores a $180°$), llame a una diagonal ***bisectriz*** si biseca al área y al perímetro del polígono. ¿Cuál es el máximo número de diagonales que son bisectrices para un pentágono convexo?

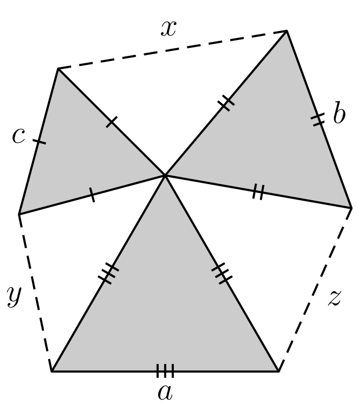
Séptima Olimpiada (2020)

1. Por *pliegue* de un papel con forma de polígono, nos referimos a dibujar un segmento en el papel y doblar el papel a lo largo de él. Supongamos que se da un papel con la siguiente figura. Cortamos el papel a lo largo del límite de la región sombreada para obtener un papel con forma de polígono. Comience con este polígono sombreado y haga un papel en forma de rectángulo con un máximo de 5 pliegues. Describe tu solución introduciendo las líneas de plegado y dibujando la forma después de cada doblez en tu hoja de solución. (Tenga en cuenta que las líneas de plegado no tienen que coincidir con las líneas de cuadrícula de la forma).



2. Dado un paralelogramo $ABCD$ ($AB \neq BC$). Los puntos E y G se eligen en la recta CD de manera que AC sea la bisectriz de ambos ángulos $\angle EAD$ y $\angle BAG$. La recta BC interseca a AE y AG en F y H, respectivamente. Demuestre que la recta FG pasa por el punto medio de HE.

3. Según la figura, tres triángulos equiláteros con lados de longitud a, b, c tienen un vértice común y no tienen ningún otro punto común. Las longitudes x, y y z se definen como en la figura. Demuestre que $3(x + y + z) > 2(a + b + c)$.

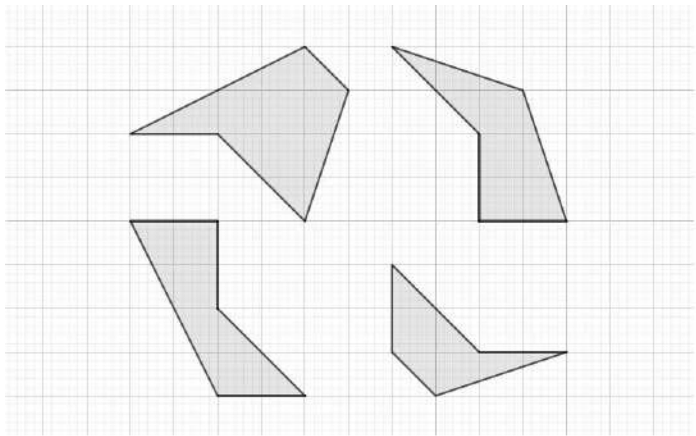


4. Sea P un punto arbitrario en el interior del triángulo ABC. Las rectas BP y CP intersecan a AC y AB en E y F, respectivamente. Sean K y L los puntos medios de los segmentos BF y CE, respectivamente. Las rectas que pasan por L y K paralelas a CF y BE intersecan a BC en S y T, respectivamente; además, denote por M y N la reflexión de S y T sobre los puntos L y K, respectivamente. Demuestre que cuando P se mueve en el interior del triángulo ABC, la recta MN pasa a través de un punto fijo.

5. Decimos que dos vértices de un polígono simple son *visibles* entre sí si son adyacentes o si el segmento que los une está completamente dentro del polígono (excepto dos extremos que se encuentran en el borde). Encuentre todos los enteros positivos n tales que exista un polígono simple con n vértices en el que cada vértice sea visible desde exactamente otros 4 vértices. (Un polígono simple es un polígono sin agujero que no se interseca a sí mismo).

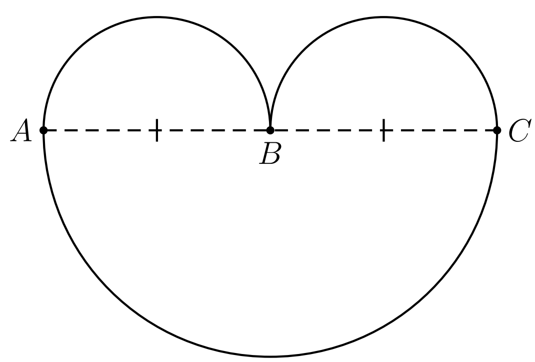
Octava Olimpiada (2021)

1. Al juntar las cuatro formas dibujadas en la siguiente figura, haga una forma con al menos dos simetrías de reflexión.



2. Los puntos K, L, M, N están en los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrado $ABCD$, respectivamente, de modo que el área de $KLMN$ es igual a la mitad del área de $ABCD$. Demuestre que alguna diagonal de $KLMN$ es paralela a algún lado de $ABCD$.

3. Como se muestra en la siguiente figura, un ***corazón*** es una figura formada por tres semicírculos con diámetros AB, BC y AC tales que B es el punto medio del segmento AC. Dado un corazón ω. Llame a un par (P, P') ***bisectriz*** si P y P' se encuentran en ω y bisecan su perímetro. Sean (P, P') y (Q, Q') pares de bisectrices. Las tangentes en los puntos P, P', Q y Q' a ω construyen un cuadrilátero convexo $XYZT$. Si el cuadrilátero $XYZT$ está inscrito en una circunferencia, encuentre el ángulo entre las rectas PP' y QQ'.

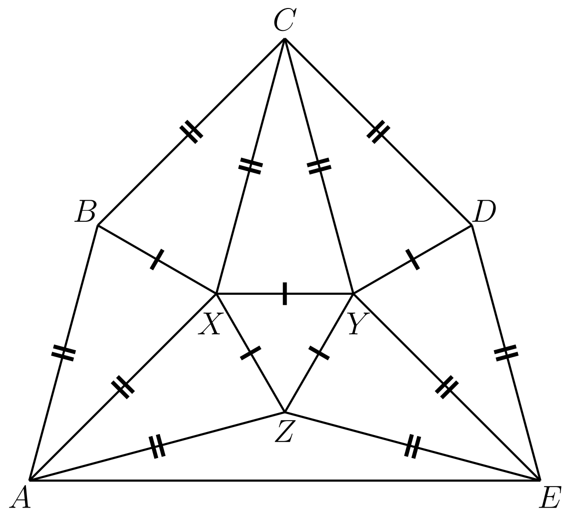


4. En el trapecio isósceles $ABCD$ ($AB \parallel CD$) los puntos E y F se encuentran sobre el segmento CD de tal forma que D, E, F y C están en ese orden y $DE = CF$. Sean X y Y las reflexiones de E y C con respecto a AD y AF, respectivamente. Demuestre que las circunferencias circunscritas de los triángulos ADF y BXY son concéntricas.

5. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{2021}$ 2021 puntos en el plano, de modo que no hay tres colineales y
$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{2021}A_1A_2 = 360^\circ,$$
siendo el ángulo $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ el que es menor que 180° (supongamos que $A_{2022} = A_1$ y $A_0 = A_{2021}$). Demuestre que algunos de estos ángulos suman 90°.

Novena Olimpiada (2022)

1. Halle las medidas de los ángulos del pentágono $ABCDE$ en la siguiente figura.



2. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$. Los puntos E y F se encuentran en los lados BC y AD, respectivamente, y los puntos M y N se encuentran en el segmento EF de modo que $DF = BE$ y $FM = NE$. Sean K y L los pies de las perpendiculares trazadas desde M y N hacia AB y CD, respectivamente. Demuestre que $EKFL$ es un paralelogramo.

3. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $AB = BC = CD$ y $\angle BDE = \angle EAC = 30°$. Encuentre los posibles valores de $\angle BEC$.

4. Sea AD una bisectriz interior del triángulo ABC, con D en BC. Las circunferencias inscritas de los triángulos ABC y ACD son tangentes exteriormente. Demuestre que $\angle ABC > 120°$.

   (Recuerde que la circunferencia inscrita de un triángulo es la circunferencia que está dentro del triángulo y es tangente a sus tres lados).

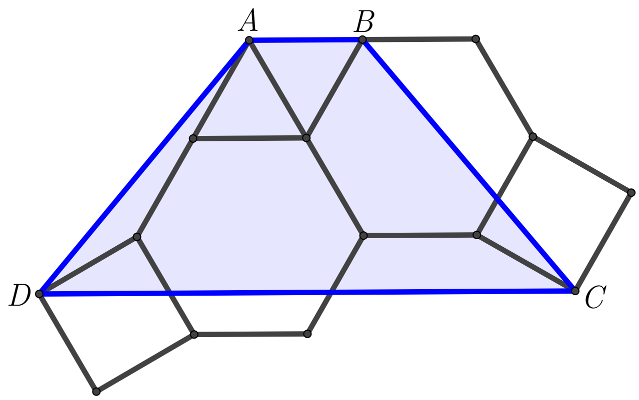
5. a) ¿Existen cuatro triángulos equiláteros en el plano tales que cada par de ellos tengan exactamente un vértice en común, y cada punto del plano se encuentre en a lo mucho el borde de dos de ellos?

   b) ¿Existen cuatro cuadrados en el plano tales que cada par de ellos tengan exactamente un vértice en común y cada punto del plano se encuentre en a lo mucho el borde de dos de ellos?

   (Tener en cuenta que en ambas preguntas, no hay ninguna afirmación sobre la intersección del interior de los polígonos).

Décima Olimpiada (2023)

1. Todos los polígonos de la siguiente figura son regulares. Demuestre que $ABCD$ es un trapecio isósceles.



2. En un triángulo isósceles ABC con $AB = AC$ y $\angle A = 30^\circ$, los puntos L y M se encuentran en los lados AB y AC, respectivamente, de modo que $AL = CM$. El punto K se encuentra en el segmento AB de modo que $\angle AMK = 45^\circ$. Si $\angle LMC = 75^\circ$, demuestre que $KM + ML = BC$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrado con una longitud de lado 1. ¿Cuántos puntos P dentro del cuadrado (no en sus lados) tienen la propiedad de que el cuadrado se puede cortar en 10 triángulos de igual área de modo que todos tengan a P como uno de sus vértices?

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea E la intersección de sus diagonales. Supongamos que $CD = BC = BE$. Demuestre que $AD + DC \geq AB$.

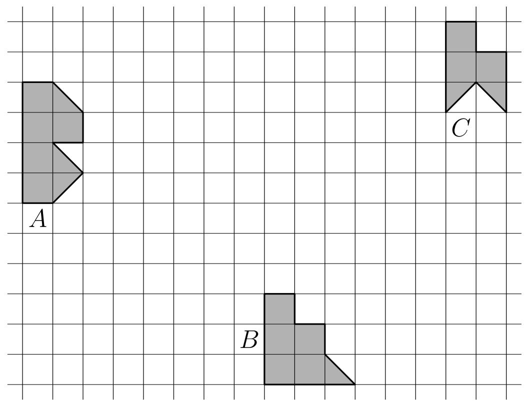
5. Un polígono se descompone en triángulos dibujando algunas diagonales interiores que no se intersecan de tal manera que para cada par de triángulos de la triangulación que comparten un lado en común, la suma de los ángulos opuestos a este lado en común es mayor que 180°.

   a) Demuestre que este polígono es convexo.

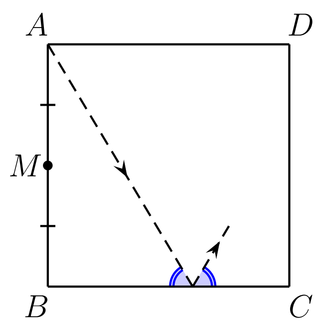
   b) Demuestre que la circunferencia circunscrita de cada triángulo usado en la descomposición contiene al polígono completo.

Undécima Olimpiada (2024)

1. Refleje cada una de las figuras A, B sobre unas rectas ℓ_A, ℓ_B respectivamente y rotar la figura C de manera que se obtenga un cuadrado de 4×4. Identificar las rectas ℓ_A, ℓ_B y el centro de la rotación, y también dibujar las versiones transformadas de A, B y C bajo estas operaciones.



2. $ABCD$ es un cuadrado con una longitud de lado de 20. Un haz de luz se irradia desde A e intersecta los lados BC, CD, DA respectivamente y llega al punto medio del lado AB. ¿Cuál es la longitud del camino que ha recorrido el haz?



3. En el interior de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se elige un punto T. El punto S se encuentra en el segmento AT tal que $DT = BC$, $\angle TSD = 90°$. Demuestre que si $\angle DTA + \angle TAB + \angle ABC = 180°$, entonces $AB + ST \geqslant CD + AS$.

4. Un polígono inscrito de n lados ($n > 3$), está dividido en $n - 2$ triángulos por diagonales que se intersecan solo en los vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de triángulos congruentes que se obtienen?

   Aclaración: Un polígono inscrito de n lados es un polígono de n lados en el que todos sus vértices se encuentran en una circunferencia.

5. Los puntos Y, Z se encuentran en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita de un triángulo acutángulo ABC (Y se encuentra en el arco menor BZ). Sea X un punto tal que los triángulos ABC, XYZ son semejantes y A, X se encuentran en el mismo lado de YZ. Las rectas XY, XZ intersecan los

lados AB, AC en los puntos E, F respectivamente. Sea K la intersección de las rectas BY, CZ. Demuestre que una de las intersecciones de las circunferencias circunscritas de los triángulos AEF, KBC se encuentra en la recta KX.