Problemas de la Olimpiada Iraní de Geometría

(Nivel Avanzado)

2014 - 2024

Juan Neyra Faustino

Fecha de edición y traducción: Diciembre 2024

JN

Segunda Olimpiada (2015)

1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 (con centro O_1 y O_2 respectivamente) se intersecan en A y B. El punto X se encuentra en ω_2. Sea el punto Y un punto en ω_1 tal que $\angle XBY = 90°$. La recta O_1X interseca a ω_2 en X' por segunda vez. Si $X'Y$ interseca ω_2 en K, demuestre que X se encuentra en el punto medio del arco AK.

2. Supongamos que ABC es el triángulo equilátero con circunferencia circunscrita ω y circuncentro O. Sea P el punto en el arco BC (el arco en el cual A no se encuentra). La tangente a ω en P interseca a la extensión de AB y AC en K y L, respectivamente. Muestre que $\angle KOL > 90°$.

3. En el triángulo ABC, H es el ortocentro del triángulo. Sean l_1 y l_2 dos rectas tales que pasan a través de H y son perpendiculares entre sí. La recta l_1 interseca a BC y a la extensión de AB en D y Z, respectivamente y la recta l_2 interseca a BC y la extensión de AC en E y X, respectivamente. Dibujamos la recta que pasa a través de D y es paralela a AC y dibujamos la recta que pasa a través de E y es paralela a AB. Supongamos que la intersección de estas rectas es denotada por Y. Demuestre que X, Y, Z son colineales.

4. En el triángulo ABC, dibujamos la circunferencia con centro A y radio AB. Esta circunferencia interseca a AC en dos puntos. También dibujamos la circunferencia con centro A y radio AC y esta circunferencia interseca a AB en dos puntos. Denote a estos cuatro puntos por A_1, A_2, A_3, A_4. Halle los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y C_1, C_2, C_3, C_4 de manera similar. Supongamos que estos 12 puntos se encuentran en dos circunferencias. Demuestre que el triángulo ABC es isósceles.

5. Los rectángulos ABA_1B_2, BCB_1C_2, CAC_1A_2 se encuentran en el exterior del triángulo ABC. Sea C' el punto tal que $C'A_1 \perp A_1C_2$ y $C'B_2 \perp B_2C_1$, los puntos A', B' se definen de manera similar. Demuestre que las rectas AA', BB', CC' concurren.

Tercera Olimpiada (2016)

1. Las circunferencias ω y ω' se intersecan en A y B. La tangente a ω por A interseca a ω' en C y la tangente a ω' por A interseca a ω en D. Suponga que el segmento CD interseca a ω y ω' en E y F, respectivamente (asuma que E está entre F y C). La perpendicular a AC que pasa por E interseca a ω' en el punto P y la perpendicular a AD que pasa por F interseca a ω en el punto Q (los puntos A, P y Q están en el mismo semiplano determinado por la recta CD). Demuestre que los puntos A, P y Q son colineales.

2. En el triángulo acutángulo ABC, la altura desde A interseca a BC en D, y M es el punto medio de AC. Sea X un punto tal que $\angle AXB = \angle DXM = 90°$ (asuma que X y C están en semiplanos distintos determinados por la recta BM). Demuestre que $\angle XMB = 2\angle MBC$.

3. En un cuadrilátero $ABCD$, sea P la intersección de los rayos DA y CB. Sean I_1 y I_2 los incentros de los triángulos PAB y PDC, respectivamente. Sean O el circuncentro de PAB, y H el ortocentro de PDC. Demuestre que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y DHC son tangentes si y sólo si las circunferencias circunscritas de los triángulos AOB y DI_2C son tangentes.

4. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, las rectas AB y CD se intersecan en E y las rectas AD y BC se intersecan en F. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Sea ω_1 la circunferencia que pasa por D y es tangente a AC en P. Sea ω_2 la circunferencia que pasa por C y es tangente a BD en P. Sea X el punto de intersección de ω_1 y AD, y sea Y el punto de intersección de ω_2 y BC. Suponga que las circunferencias ω_1 y ω_2 se intersecan por segunda vez en Q. Demuestre que la perpendicular desde P a la recta EF pasa por el circuncentro del triángulo XQY.

5. ¿Existen seis puntos $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ en el plano tales que todos los triángulos $X_iY_jZ_k$ son semejantes para $1 \leq i, j, k \leq 2$?

Cuarta Olimpiada (2017)

1. En un triángulo ABC, su circunferencia inscrita, de centro I, es tangente al lado BC en un punto D. La recta DI corta a AC en X. La tangente por X a la circunferencia inscrita (diferente de AC) interseca a AB en Y. Si la recta YI corta a BC en un punto Z, demuestre que $AB = BZ$.

2. Se tiene seis circunferencias que por pares no se cortan y son exteriores, tales que cada una tiene radio mayor o igual a 1. Demuestre que el radio de cualquier circunferencia que interseca a cada una de las seis circunferencias dadas, es al menos 1.

3. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La recta CO interseca a la altura trazada por A en el punto K. Sean P, M los puntos medios de AK, AC, respectivamente. Si PO interseca a BC en Y, y la circunferencia circunscrita del triángulo BCM corta nuevamente a AB en X, demuestre que $BXOY$ es cíclico.

4. Tres circunferencias ω_1, ω_2, ω_3 son tangentes a una recta ℓ en los puntos A, B, C (con B entre A y C) y ω_2 es tangente externamente a las otras dos. Sean X, Y los puntos de intersección de ω_2 con la otra tangente externa común a ω_1 y ω_3. La recta perpendicular a ℓ por B, corta a ω_2 nuevamente en Z. Demuestre que la circunferencia de diámetro AC es tangente a ZX y a ZY.

5. Una esfera S es tangente a un plano. Sean A, B, C, D cuatro puntos de tal plano de manera que no hay tres de ellos colineales. Considere el punto A' tal que S es tangente a las caras del tetraedro $A'BCD$. Los puntos B', C', D' se definen de manera similar. Demuestre que A', B', C', D' son coplanares y que el plano donde se encuentran es tangente a S.

Quinta Olimpiada (2018)

1. Dos circunferencias ω_1, ω_2 se intersecan en los puntos A, B. Sea PQ una recta tangente común de estas dos circunferencias con $P \in \omega_1$ y $Q \in \omega_2$. Un punto arbitrario X se encuentra en ω_1. La recta AX interseca a ω_2 por segunda vez en Y. El punto $Y' \neq Y$ se encuentra en ω_2 de modo que $QY = QY'$. La recta $Y'B$ interseca a ω_1 por segunda vez en X'. Demuestre que $PX = PX'$.

2. En el triángulo acutángulo ABC, $\angle A = 45°$. Los puntos O, H son el circuncentro y el ortocentro de ABC, respectivamente. D es el pie de la altura desde B. El punto X es el punto medio del arco AH de la circunferencia circunscrita del triángulo ADH que contiene a D. Demuestre que $DX = DO$.

3. Halle todos los valores posibles de entero $n > 3$ tales que exista un polígono convexo de n lados en el cual, cada diagonal es la mediatriz de al menos otra diagonal.

4. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito alrededor de una circunferencia. Las diagonales AC, BD no son perpendiculares entre sí. Las bisectrices de los ángulos entre estas diagonales, intersecan a los segmentos AB, BC, CD y DA en los puntos K, L, M y N. Dado que $KLMN$ es cíclico, demuestre que también lo es $ABCD$.

5. $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. Una circunferencia que pasa por A, B es tangente al segmento CD en el punto E. Otra circunferencia que pasa por C, D es tangente a AB en el punto F. El punto G es el punto de intersección de AE, DF, y el punto H es el punto de intersección de BE, CF. Demuestre que los incentros de los triángulos AGF, BHF, CHE, DGE se encuentran en una circunferencia.

Sexta Olimpiada (2019)

1. Las circunferencias ω_1 y ω_2 se intersecan en los puntos A y B. El punto C se encuentra en la recta tangente desde A hacia ω_1 de manera que $\angle ABC = 90°$. La recta arbitraria ℓ pasa por C e interseca a ω_2 en los puntos P y Q. Las rectas AP y AQ intersecan a ω_1 por segunda vez en los puntos X y Z respectivamente. Sea Y el pie de la altura trazada desde A hacia ℓ. Demuestre que los puntos X, Y y Z son colineales.

2. ¿Es cierto que en cualquier polígono convexo de n lados con $n > 3$, existe un vértice y una diagonal que pasa por este vértice de manera que los ángulos de esta diagonal con ambos lados adyacentes a este vértice son agudos?

3. Las circunferencias ω_1 y ω_2 tienen centros O_1 y O_2, respectivamente. Estas dos circunferencias se intersecan en los puntos X y Y. AB es la recta tangente común de estas dos circunferencias, de manera que A se encuentra en ω_1 y B se encuentra en ω_2. Supongamos que las tangentes a ω_1 y ω_2 en X intersecan a O_1O_2 en los puntos K y L, respectivamente. Suponga que la recta BL interseca a ω_2 por segunda vez en M y la recta AK interseca a ω_1 por segunda vez en N. Demuestre que las rectas AM, BN y O_1O_2 concurren.

4. Dado un triángulo acutángulo escaleno ABC con circunferencia circunscrita Γ. M es el punto medio del segmento BC y N es el punto medio de $\overset{\frown}{BC}$ de Ω (el que no contiene A). X y Y son puntos en Γ tales que $BX \parallel CY \parallel AM$. Suponga que existe un punto Z en el segmento BC tal que la circunferencia circunscrita del triángulo XYZ es tangente a BC. Suponga que ω sea la circunferencia circunscrita del triángulo ZMN. La recta AM interseca a ω por segunda vez en P. Sea K un punto en ω tal que $KN \parallel AM$, seaω_b una circunferencia que pasa por B, X y es tangente a BC y sea ω_c una circunferencia que pasa por C, Y y es tangente a BC. Demuestre que la circunferencia con centro K y radio KP es tangente a las 3 circunferencias ω_b, ω_c y Γ.

5. Supongamos que los puntos A, B y C se encuentran en la parábola Δ de manera que el punto H, ortocentro del triángulo ABC, coincida con el foco de la parábola Δ. Demuestre que al cambiar la posición de los puntos A, B y C en Δ de modo que el ortocentro permanezca en H, el inradio del triángulo ABC permanece sin cambios.

Séptima Olimpiada (2020)

1. Sean M, N y P los puntos medios de los lados BC, AC y AB del triángulo ABC, respectivamente. Sean E y F dos puntos en el segmento BC de modo que $\angle NEC = \frac{1}{2}\angle AMB$ y $\angle PFB = \frac{1}{2}\angle AMC$. Demuestre que $AE = AF$.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo con su incentro I. Suponga que N es el punto medio del arco BAC de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, y P es un punto tal que $ABPC$ es un paralelogramo. Sea Q el reflejo de A sobre N y R la proyección de A sobre QI. Demuestre que la recta AI es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo PQR.

3. Suponga tres circunferencias mutuamente fuera de cada uno con la propiedad de que cada recta que separa dos de ellas tiene intersección con el interior de la tercera. Demuestre que la suma de las distancias por pares entre sus centros es como máximo $2\sqrt{2}$ veces la suma de sus radios. (Una recta separa dos circunferencias, siempre que las circunferencias no tengan intersección con la recta y estén en lados diferentes de la misma).

   Nota. Los resultados más débiles con $2\sqrt{2}$ reemplazados por alguna otra c pueden otorgar puntos dependiendo del valor de $c > 2\sqrt{2}$.

4. El cuadrilátero circunscrito convexo $ABCD$ con incentro I es dado de manera que su circunferencia inscrita es tangente a AD, DC, CB y BA en K, L, M y N. Las rectas AD y BC se intersecan en E y las rectas AB y CD se intersecan en F. Supongamos que KM interseca a AB y CD en X y Y, respectivamente. Supongamos que LN interseca a AD y BC en Z y T, respectivamente. Demuestre que la circunferencia circunscrita del triángulo XFY y la circunferencia con diámetro EI son tangentes si y solo si la circunferencia circunscrita del triángulo TEZ y la circunferencia con diámetro FI son tangentes.

5. Considere un triángulo acutángulo ABC ($AC > AB$) con su ortocentro H y circunferencia circunscrita Γ. Los puntos M y P son los puntos medios de los segmentos BC y AH, respectivamente. La recta AM interseca a Γ por segunda vez en X y el punto N se encuentra en la recta BC de modo que NX es tangente a Γ. Los puntos J y K se encuentran en la circunferencia con diámetro MP tal que $\angle AJP = \angle HNM$ (B y J se encuentran en el mismo lado de AH) y la circunferencia ω_1, que pasa a través de K, H y J, y la circunferencia ω_1, que pasa a través de K, M y N, son tangentes externamente entre sí. Demuestre que las tangentes exteriores en común de ω_1 y ω_2 se intersecan en la recta NH.

Octava Olimpiada (2021)

1. Dado el triángulo acutángulo ABC con circunferencia circunscrita ω. Sean D el punto medio de AC, E el pie de la altura trazada desde A hacia BC y F el punto de intersección de AB y DE. El punto H se encuentra en el arco BC de ω (que no contiene a A) tal que $\angle BHE = \angle ABC$. Demuestre que $\angle BHF = 90°$.

2. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se intersecan en dos puntos distintos A y B. Una recta que pasa por A interseca de nuevo a Γ_1 y Γ_2 en C y D respectivamente, de modo que A se encuentra entre C y D. La tangente en A a Γ_2 interseca a Γ_1 nuevamente en E. Sea F un punto en Γ_2 tal que F y A se encuentran en lados diferentes de BD, y $2\angle AFC = \angle ABC$. Demuestre que la tangente en F a Γ_2 y las rectas BD y CE son concurrentes.

3. Considere un triángulo ABC con alturas AD, BE y CF, y ortocentro H. Supongamos que la recta perpendicular desde H hacia EF interseca a EF, AB y AC en P, T y L, respectivamente. El punto K está en el lado BC tal que $BD = KC$. Sea ω una circunferencia que pasa por H y P, que es tangente a AH. Demuestre que la circunferencia circunscrita del triángulo ATL y ω son tangentes, y KH pasa por el punto de tangencia.

4. Dados 2021 puntos en el plano en posición convexa, no hay tres colineales ni cuatro concíclicos. Demuestre que existen dos de ellos tales que cada circunferencia que pase por estos dos puntos contiene al menos 673 de los otros puntos en su interior.

   (Un conjunto finito de puntos en el plano están en posición convexa si los puntos son los vértices de un polígono convexo).

5. Dado un triángulo ABC con incentro I. La circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a BC en D. Sean P y Q puntos del lado BC tales que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle QAC = \angle ABC$, respectivamente. Sean K y L los incentros de los triángulos ABP y ACQ, respectivamente. Demuestre que AD es la recta de Euler del triángulo IKL.

   (La recta de Euler de un triángulo es la recta que pasa por el circuncentro y el ortocentro de ese triángulo).

Novena Olimpiada (2022)

1. Cuatro puntos A, B, C y D se encuentran en una circunferencia ω tales que $AB = BC = CD$. La recta tangente a ω por el punto C interseca a la recta tangente a ω por el punto A y a la recta AD en los puntos K y L, respectivamente. La circunferencia circunscrita al triángulo KLA y ω se intersecan nuevamente en M. Demuestre que $MA = ML$.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. Sea D un punto en la recta BC tal que DA es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Sean E y F los circuncentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente, y sea M el punto medio de EF. Demuestre que la recta tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo AMD a través de D también es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

3. En el triángulo ABC ($\angle A \neq 90°$), sean O y H el circuncentro y el pie de la altura desde A, respectivamente. Supongamos que M y N son los puntos medios de BC y AH respectivamente. Sea D la intersección de AO y BC, y sea H' el reflejo de H sobre M. Suponga que la circunferencia circunscrita al triángulo $OH'D$ interseca por segunda vez a la circunferencia circunscrita a BOC en E. Demuestre que NO y AE se intersecan en un punto de la circunferencia circunscrita a BOC.

4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$. Sus diagonales se intersecan en el punto P. La recta que pasa por P paralela a AB interseca a AD y BC en Q y R, respectivamente. Las bisectrices exteriores de los ángulos DBA y DCA se intersecan en X. Sea S el pie de la altura trazada desde X hacia BC. Demuestre que si los cuadriláteros $ABPQ$ y $CDQP$ son circunscriptibles, entonces $PR = PS$.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en una circunferencia ω con centro O. Los puntos E y F se encuentran en los lados AC y AB, respectivamente, de modo que O se encuentra en EF y $BCEF$ es cíclico. Sean R y S las intersecciones de EF con los arcos menores AB y AC de ω, respectivamente. Supongamos que K y L son el reflejo de R sobre C y el reflejo de S sobre B, respectivamente. Supongamos que los puntos P y Q se encuentran en las rectas BS y RC, respectivamente, de modo que PK y QL son perpendiculares a BC. Demuestre que la circunferencia de centro P y radio PK es tangente a la circunferencia circunscrita a RCE si y solo si la circunferencia de centro Q y radio QL es tangente a la circunferencia circunscrita a BFS.

Décima Olimpiada (2023)

1. Dado un triángulo acutángulo ABC. La bisectriz del ángulo BAC interseca a BC en P. Los puntos D y E se encuentran en los segmentos AB y AC, respectivamente, de modo que $BC \parallel DE$. Los puntos K y L se encuentran en los segmentos PD y PE, respectivamente, de modo que los puntos A, D, E, K, L son concíclicos. Demuestre que los puntos B, C, K, L también son concíclicos.

2. Sea ABC un triángulo con incentro I. Las rectas BI y CI intersecan a los lados AC y AB en X y Y, respectivamente. Sea M el punto medio del arco BAC de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Supongamos que el cuadrilátero $MXIY$ es cíclico. Demuestre que el área del cuadrilátero $MBIC$ es igual al área del pentágono $BCXIY$.

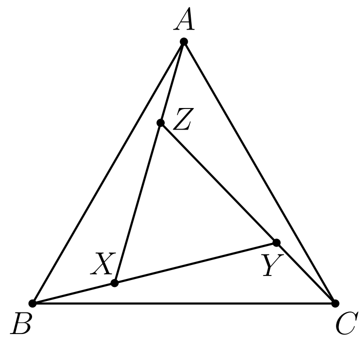
3. Hemos elegido un número finito de puntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en el segmento S con longitud L. Para cada punto A_i, sea c_i un disco cerrado con centro en A_i y radio menor o igual a 1 (los radios de los discos no son necesariamente iguales). Sea C la unión de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Demuestre que el perímetro de C es menor que $4L + 8$.

4. Supongamos que las bisectrices de los ángulos B y C en el triángulo ABC intersecan a AC y a AB en E y F, respectivamente. Denote el punto de intersección de BE y CF por I y sea D el pie de la perpendicular trazada desde I sobre BC. Sean M y N los ortocentros de los triángulos AIF y AIE, respectivamente. Las rectas EM y FN se intersecan en P. Sea X el punto medio de BC. Sea Y el punto que se encuentra en la recta AD de modo que $XY \perp IP$. Demuestre que la recta AI biseca al segmento XY.

5. En el triángulo ABC los puntos M y N son los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente; y D es la proyección de A sobre BC. El punto O es el circuncentro del triángulo ABC y las circunferencias circunscritas de los triángulos BOC y DMN se intersecan en los puntos R y T. Las rectas DT y DR intersecan a la recta MN en E y F, respectivamente. Las rectas CT y BR se intersecan en K. Un punto P se encuentra en KD de modo que PK es la bisectriz del ángulo BPC. Demuestre que las circunferencias circunscritas de los triángulos ART y PEF son tangentes.

Undécima Olimpiada (2024)

1. Un triángulo equilátero ABC se divide en 4 triángulos con áreas iguales; tres triángulos congruentes ABX, BCY, CAZ y un triángulo equilátero más pequeño XYZ, como se muestra en la figura. Demuestre que los puntos X, Y y Z se encuentran en la circunferencia inscrita del triángulo ABC.



2. El punto P se encuentra en el lado CD del cuadrilátero cíclico $ABCD$ tal que $\angle CBP = 90°$. Sea K la intersección de AC y BP tal que $AK = AP = AD$. Sea H la proyección de B sobre la recta AC. Demuestre que $\angle APH = 90°$.

3. En el triángulo ABC sea D el pie de la altura desde A hacia el lado BC y sean I, I_A, I_C el incentro, el excentro A y el excentro C, respectivamente. Denotemos por $P \neq B$ y $Q \neq D$ los otros puntos de intersección de la circunferencia circunscrita del triángulo BDI_C con las rectas BI y DI_A, respectivamente. Demuestre que $AP = AQ$.

4. El punto P está dentro del triángulo acutángulo ABC tal que $\angle BPC = 90°$ y $\angle BAP = \angle PAC$. Sea D la proyección de P sobre el lado BC. Sean M y N los incentros de los triángulos ABD y ADC respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero $BMNC$ es cíclico.

5. Dado el cuadrilátero cíclico $ABCD$ con circunferencia circunscrita ω. Sea E un punto fijo en el segmento AC. M es un punto arbitrario en ω, las rectas AM y BD se intersecan en un punto P. EP interseca a AB y AD en los puntos R y Q, respectivamente, S es la intersección de BQ, DR y las rectas MS y AC se intersecan en un punto T. Demuestre que, a medida que M varía, la circunferencia circunscrita del triángulo CMT pasa por un punto fijo distinto de C.